



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO  
UNIDADE ACADÊMICA DO CABO DE SANTO AGOSTINHO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FÍSICA

ROBSON VIEIRA SILVA

Sincronização de um oscilador eletrônico caótico com uma superposição de sinais de  
osciladores idênticos

Cabo de Santo Agostinho - PE  
2021

ROBSON VIEIRA SILVA

Sincronização de um oscilador eletrônico caótico com uma superposição de sinais de osciladores idênticos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Física, Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Física.

Área de concentração: Optoeletrônica

Linha de pesquisa: Controle e Dinâmica Não-Linear

Orientador: Prof. Dr. Marcos César Oriá

Coorientador: Prof. Dr. Weliton Soares Martins.

CABO DE SANTO AGOSTINHO  
2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Sistema Integrado de Bibliotecas  
Gerada automaticamente, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

---

- S586s Silva, Robson Vieira  
Sincronização de um oscilador eletrônico caótico com uma superposição de sinais de osciladores idênticos / Robson Vieira Silva. - 2021.  
134 f. : il.
- Orientador: Marcos Cesar Oria.  
Coorientador: Weliton Soares Martins.  
Inclui referências.
- Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Física, Cabo de Santo Agostinho, 2021.
1. Sincronização. 2. Caos. 3. Acoplamento. 4. Superposição de sinais. I. Oria, Marcos Cesar, orient. II. Martins, Weliton Soares, coorient. III. Título

Robson Vieira Silva

Sincronização de um oscilador eletrônico caótico com uma superposição de sinais de osciladores idênticos

Dissertação apresentada à Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho da Universidade Federal Rural de Pernambuco para obtenção do título de Mestre em Engenharia Física.

APROVADO EM: 26/02/2021

Banca Examinadora

---

Prof. Marcos César Oriá  
Orientador

---

Prof. Weliton Soares Martins  
Coorientador

---

Prof. Gilson Francisco de Oliveira Junior  
Membro Externo

---

Prof. Fernando Jorge Sampaio Moraes  
Membro Interno

## AGRADECIMENTOS

Agradeço imensamente ao autor e consumidor da minha Fé, Deus. Proveu tudo o que foi necessário para alcançar mais uma conquista. Sem Ele, nada do que foi feito se fez.

Agradeço aos meus pais, Francisco (Seu Chico), Maria de Fátima (Dona Linda) e ao meu irmão Rafael V., que não mediram esforços para ajudar-me durante toda a minha formação. Sonharam junto comigo este dia!

Agradeço ao meu orientador, Prof. Oriá, e coorientador, Prof. Weliton, que me acolheram e deram tratamento de filho. Me senti muito acolhido por vocês. Obrigado por terem sido pacientes comigo. Obrigado pelos ensinamentos, sejam eles científicos ou lições de vida. Obrigado por cada reunião e puxada de orelha. Obrigado, meus mestres!

Agradeço à Profa. Martine Chevrollier, por todo apoio e assistência. Agradeço ao Prof. Sérgio Vladimir e Prof. Rafael Alves, pelo conselhos e ensinamentos.

Agradeço aos estudantes de iniciação científica, que se disporem em ajudar-me durante todo o mestrado.

Agradeço aos/às meus/minhas amigos/as, Felipe, Isabel (Berel), Francisco (Chico Man), Inadja (Inara), Idjany (Lourajany), Fagner, Amós. Obrigado por acreditarem em mim. Minha vitória também é de vocês!

Agradeço à minha namorada, Natália Késia. Obrigado por ser compreensiva, principalmente nos extensos momentos que estive ausente. Obrigado pelo seu amor, que aqueceu meu coração trágico.

Agradeço aos amigos que o mestrado me deu, Jéssica Beatriz, José Henrique e Sebastião Pinto. Obrigado por cada momento, cada gargalhada... os desesperos (risos). Aprendi muito com vocês. Estou carregando cada um, eternamente, em meu coração.

Agradeço à mãe adotiva que o Cabo de Santo Agostinho me deu, Edjane Maria. Essa mulher guerreira, que mesmo diante de suas lutas diárias, nunca hesitou em ajudar. Me adotou como filho, desde o que dia que nos conhecemos. Obrigado, por tudo!

Agradeço ao meu sertão amado, meu berço querido. Sou grato pelo sertanejado trovador que me proporcionou ser. Como dizia o saudoso poeta pernambucano, Rogaciano Leite: " Eles cantam suas praias/Palácios de porcelana/Eu canto a roça, a choupana/Canto o sertão, que ele é meu."

Agradeço à agência de fomento FACEPE, que arcou com os recursos necessá-

rios para que este trabalho fosse desenvolvido.

*“Dê-me, Senhor, agudeza para entender, capacidade para reter, método e faculdade para aprender, sutileza para interpretar, graça e abundância para falar. Dê-me, Senhor, acerto ao começar, direção ao progredir e perfeição ao concluir.”*

*- Santo Tomás de Aquino*

## RESUMO

Um estudo experimental e numérico de sincronização caótica foi realizado entre múltiplos osciladores não lineares acoplados a um oscilador não linear receptor. O principal resultado deste estudo foi obtido através do acoplamento aditivo unidirecional. Nesta condição os osciladores diretores não interagem entre si e não recebem nenhum sinal do oscilador receptor. Assim, garantimos que os sinais de acoplamento sejam transmitidos apenas ao receptor. Ao descrever as etapas que levaram a essas observações, inicialmente, apresentamos alguns conceitos fundamentais de sincronização entre osciladores caóticos e relatamos algumas de nossas investigações iniciais nas quais reproduzimos resultados da literatura, que demonstram alguns tipos de sincronismo, por exemplo, sincronização completa, sincronização atrasada, etc. Apresentamos um sistema não-linear específico, o sistema Gauthier-Bienfang (GB), que usamos com mais frequência neste trabalho. Construimos osciladores do tipo G-B, caracterizamos sua dinâmica e realizamos acoplamentos entre dois osciladores, na configuração diretor-receptor. Usando essa configuração, pudemos observar sincronização completa e intermitente. Através da análise estatística dos eventos de dessincronização verificamos a existência de eventos extremos do tipo Dragão-Rei. A reprodução desses resultados da literatura demonstra que os osciladores caóticos que construimos, para este trabalho, apresentam o funcionamento esperado, dando-nos confiança para prosseguir com investigações originais. Por meio de cálculos numéricos e realizações experimentais da configuração de acoplamento com mais de um oscilador diretor acoplado ao oscilador receptor, mostramos que um oscilador caótico sincroniza com um sinal que é uma combinação linear de sinais com informações parciais dos osciladores diretores. Além disso, demonstramos analiticamente a convergência do sincronismo de um oscilador G-B para o sinal soma quando aumentamos o número de osciladores diretores, com níveis de acoplamento cada vez menores. Também investigamos esse comportamento com outro sistema não-linear, o sistema de Lorenz. Numericamente mostramos a convergência da trajetória de um oscilador receptor Lorenz para a trajetória da combinação linear dos diretores. A qualidade dessa sincronização também melhora com o aumento do número de osciladores acoplados, para cada nível de acoplamento. Esses resultados, em que um oscilador não-linear sincroniza com um sinal soma, abrem perspectivas para investigações de sistemas de redes complexas com acoplamento.

**Palavras-chaves:** Sincronização, Caos, Acoplamento, Superposição de sinais.

## ABSTRACT

An experimental and numerical study of chaos synchronization was carried out between multiple nonlinear oscillators driving a receiving nonlinear oscillator. The main result of this study was obtained through unidirectional additive coupling. In this condition the drivers do not interact with each other and do not receive any signal from the receiving oscillator. Thus, we ensure that the drive signals are passed only to the receiver. In describing the steps that led to these observations, we initially presented some fundamental concepts of synchronization between chaotic oscillators and reported some of our initial investigations in which we reproduced results from the literature, which demonstrate some types of synchronism, for example, complete synchronization, delayed synchronization, etc. We present a particular non-linear system, the Gauthier-Bienfang (G-B) system, which we use most frequently in this work. We build G-B type oscillators, characterize their dynamics and perform couplings between two oscillators, in the drive-receiver configuration. Using such a configuration we were able to observe complete and intermittent synchronization. Through the statistical analysis of the events of desynchronization we verify the existence of extreme events of the Dragon-King type. The reproduction of these results from the literature demonstrates that the chaotic oscillators that we built for this work present the expected functioning, giving us confidence to proceed with original investigations. Through numerical calculations and experimental realization of the coupling configuration with more than one director oscillator coupled to the receiving oscillator, we show that a chaotic oscillator synchronizes with a signal that is a linear combination of signals with partial information of the director oscillators. In addition, we demonstrate analytically the convergence of the synchronism of a G-B oscillator to the sum signal when we increase the number of drivers, with ever lower coupling levels. We also investigated this behavior with another nonlinear system, the Lorenz system. Numerically we show the convergence of the trajectory of a Lorenz receiver oscillator to the trajectory of the linear combination of the drivers. The quality of this synchronization has also been shown to increase with the increase in the number of coupled oscillators, for each coupling level. These results, in which a non-linear oscillator synchronizes with a sum signal, open perspectives for investigations of complex coupled network systems.

**Keywords:** Synchronization, Chaos, Coupling, Signal superposition.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Solução da função $\dot{x}$ com $x$ variando de $-4.5\pi$ à $4.5\pi$ . . . . .	5
Figura 2 – Solução da função $\dot{x}$ com $x$ variando de $-4.5\pi$ à $4.5\pi$ . . . . .	6
Figura 3 – Trajetória no espaço de estado bidimensional. . . . .	7
Figura 4 – Classificação dos pontos fixos: nó (a) estável e (b) instável; espiral (c) estável e (d) instável. . . . .	8
Figura 5 – Fonte: Autor . . . . .	8
Figura 6 – Ponto de sela em espaço bidimensional. . . . .	8
Figura 7 – Ciclo limite: (a) estável, (b) instável e (c) semi-estável. . . . .	9
Figura 8 – Demonstração qualitativa da divergência exponencial de duas trajetórias obtidas com condições iniciais diferentes. . . . .	14
Figura 9 – Evolução temporal da variável, $x(t)$ (linha preta), de um sistema não-linear, com condições iniciais diferentes: (a) $x(t) + \delta_1$ (linha vermelha) e (b) $x(t) + \delta_2$ (linha azul). . . . .	15
Figura 10 – Série temporal das variáveis do sistema de Lorenz. . . . .	18
Figura 11 – Retrato de fase das variáveis: (a) $z \times x$ , (b) $y \times x$ e (c) $z \times y$ . . . . .	19
Figura 12 – Série temporal das variáveis $x$ , $y$ e $z$ do sistema de Lorenz, com $\sigma = 10.00$ , $b = 8.00/3.00$ e $r = 100.75$ . . . . .	19
Figura 13 – Espaço de estado do sistema de Lorenz em regime periódico, com $r = 100.75$ . . . . .	20
Figura 14 – Sistema de Rössler: dois osciladores desacoplados e evoluindo livremente, com $c_1 = 0$ . (a) Série temporal do oscilador diretor, linha preta, e receptor, linha vermelha; (b) Retrato de fase das variáveis $y_2 \times x_2$ . . . . .	24
Figura 15 – Sincronização completa entre dois osciladores de Rössler com $c_1 = 1.0$ : (a) Série temporal do oscilador diretor, linha preta, e receptor, linha vermelha; (b) Retrato de fase das variáveis $x_2 \times y_2$ . A reta na diagonal ratifica a sincronização observada em (a). . . . .	25
Figura 16 – Sincronização de Fase entre dois osciladores de Rössler: Série temporal dos osciladores $\mathbf{R}_1$ , linha preta, e $\mathbf{R}_2$ , linha vermelha, com (a) $c_1 = 0.04$ , sincronizados; e (b) $c_1 = 0.001$ , dessincronizados. . . . .	27
Figura 17 – Sincronização com Atraso entre dois osciladores de Rössler, com $c_1 = 0.17$ e $\tau = 0.24$ : (a) Série temporal das variáveis $x_1$ , linha preta, e $y_1$ , linha vermelha; (b) Retrato de fase das variáveis $x_1 \times y_1$ . . . . .	28
Figura 18 – Sincronização Antecipada com dois osciladores de Rössler, com $c_1 = 1.0$ e $\tau = 0.4$ : (a) Série temporal das variáveis $x_1$ , linha preta, e $y_1$ , linha vermelha; (b) Retrato de fase das variáveis $y_1 \times x_1$ , confirmando a convergência dos osciladores diretor e receptor. . . . .	29

Figura 19 – Sincronização Generalizada entre um oscilador de Rössler e um de Lorenz, acoplados por substituição: Retrato de fase $y_1 \times x_1$ (a) com $\mu = y_1$ , os osciladores estão descorrelacionados; e (b) $\mu = x_1 + x_2 + x_3$ , os osciladores estão relacionados, configurando Sincronização Generalizada. . . . .	31
Figura 20 – Diagrama esquemático do circuito Gauthier-Bienfang. . . . .	33
Figura 21 – Conversor de impedância negativa, onde $Z_a$ , $Z_b$ e $Z_c$ são as impedâncias de cada resistor, respectivamente. . . . .	36
Figura 22 – Série temporal do sinal de entrada, $V_{in}$ , linha preta, com uma frequência de 1kHz e amplitude $1 V_{pp}$ , e o sinal do Resistor Negativo, linha vermelha. Gráfico I-V com a inclinação negativa da reta, característica de um resistor tipo N. . . . .	37
Figura 23 – Dispositivo Não-Linear, composto por dois diodos 1N4148 e um resistor, $R_2$ . . . . .	37
Figura 24 – Gráfico de $g[V_{in}]$ para diferentes valores de $R_2$ , onde $V_{in}$ é uma função seno. . . . .	38
Figura 25 – Retrato de fase das variáveis $V_1 \times V_2$ . (a) Regime periódico, com $R_2 = 1.65$ ; (b) Regime Multiperódico, com $R_2 = 2.20$ ; (c) e (d) Regime Caótico, $R_2 = 2.70$ e $R_2 = 3.50$ , respectivamente. Os demais parâmetros são iguais em todos os casos, ou seja, $R_1 = 1.300$ , $R_3 = 0.193$ , $I_r = 22.5 \times 10^{-6}$ e $\alpha = 11.57$ . . . . .	39
Figura 26 – Gráfico das funções $f(I)$ , reta vermelha, e $h(I)$ , curva preta: (a) $R_2 = 1.0$ ; (b) $R_2 = 1.5$ ; (c) $R_2 = 2.5$ ; e (d) $R_2 = 4.0$ . . . . .	41
Figura 27 – Diagrama de Bifurcação, variando o parâmetro $R_2$ : (a), (b) e (c) entre 0.0 e 4.1; e (d), (e), e (f) entre 1.0 e 1.2, uma ampliação da região selecionada de (a), (b) e (c) pela linha vermelha. . . . .	42
Figura 28 – Autovalores calculados com ponto fixo localizado no semieixo positivo em função da variação do parâmetro $R_2$ entre 0.0 e 4.0: $\lambda_0$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ parte (a) real e (b) imaginária. . . . .	44
Figura 29 – Autovalores calculados com ponto fixo localizado na origem em função da variação do parâmetro $R_2$ entre 0.0 e 4.0: $\lambda_0$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ parte (a) real e (b) imaginária. . . . .	45
Figura 30 – Autovalores calculados com ponto fixo localizado no semieixo negativo em função da variação do parâmetro $R_2$ entre 0.0 e 4.0: $\lambda_0$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ parte (a) real e (b) imaginária. . . . .	45
Figura 31 – Sistema G-B, acoplamento aditivo unidirecional entre dois osciladores via a variável $V_1$ . Séries temporais e retratos de fase das variáveis $V_{2d}$ e $V_{2r}$ : para (a) $c_1 = 0.00$ ; (b) $c_1 = 0.24$ ; (c) $c_1 = 0.50$ ; (d) $c_1 = 0.80$ . . . . .	48

Figura 32 – Série temporal da distância escalar entre as trajetórias dos osciladores acoplados via $V_1$ , $ x_\perp $ , para (a) $c_1 = 0.0$ ; (b) $c_1 = 0.24$ ; (c) $c_1 = 0.50$ ; e (d) $c_1 = 0.80$ . . . . .	49
Figura 33 – Medida de convergência entre os osciladores, diretor e receptor, acoplados via $V_1$ . Gráfico dos $ x_\perp _{max}$ , quadrado preto, e $ x_\perp _{rms}$ , bola vermelha, em função do coeficiente de acoplamento, $c_1$ , variando entre 0.0 e 1.0. . . . .	49
Figura 34 – Sistema G-B, acoplamento aditivo unidirecional entre dois osciladores via a variável $V_2$ . Séries temporais e retratos de fase das variáveis $V_{1d}$ e $V_{1r}$ : para (a) $c_2 = 0.4$ ; (b) $c_2 = 0.8$ ; (c) $c_2 = 1.4$ ; (d) $c_2 = 3.0$ . . . . .	51
Figura 35 – Série temporal da distância escalar entre as trajetórias dos osciladores acoplados via $V_2$ do $ x_\perp $ , para (a) $c_2 = 0.4$ ; (b) $c_2 = 0.8$ ; (c) $c_2 = 1.4$ ; e (d) $c_2 = 3.0$ . . . . .	51
Figura 36 – Medida de convergência entre os osciladores, diretor e receptor, acoplados via $V_2$ . Gráfico dos $ x_\perp _{max}$ (quadrado preto) e $ x_\perp _{rms}$ (bola vermelha) em função da força de acoplamento, $c_2$ , variando de 0.0 a 8.0. . . . .	52
Figura 37 – Histograma do $ x_\perp $ . Observamos o evento extremo Dragão-Rei, com $c_2 = 4.0$ e 1% de diferença entre os parâmetros dos osciladores acoplados. . . . .	53
Figura 38 – Ruído Branco Uniforme $\pm 0.2$ . . . . .	54
Figura 39 – Histograma dos máximos locais do $ x_\perp $ sem, linha preta, e com, linha vermelha, ruído, onde não ocorreu a metigação do evento extremo, do tipo Dragão-Rei. . . . .	54
Figura 40 – Diagrama esquemático simplificado do acoplamento entre os três osciladores caóticos. . . . .	57
Figura 41 – Séries temporais e retratos de fases das variáveis $y_{1,2,s}$ , $y$ , $z_{1,2,s}$ e $z$ : Correlação das variáveis do receptor, linha vermelha, com (a), (b) oscilador diretor 1, linha azul; (c), (d) oscilador diretor 2, linha verde; e (e), (f) sinal soma, linha preta. . . . .	59
Figura 42 – Série temporal: (a) $ x_\perp _1$ ; (b) $ x_\perp _2$ ; e (c) $ x_\perp _s$ . . . . .	60
Figura 43 – (a) $ x_\perp _1$ ; (b) $ x_\perp _2$ ; e (c) $ x_\perp _s$ em função do nível de acoplamento $c = c_1 = c_2$ variando de 0.0 a 1.0. . . . .	61
Figura 44 – Sistema G-B com $c_1 = 4.0$ , fixo, e variamos $c_2$ : $y \times y_i$ . Na esquerda, $i = 1$ ; centro, $i = 2$ ; direita, $i = s$ . (a) $c_2 = 0.0$ , (b) $c_2 = 0.5$ , (c) $c_2 = 1.0$ , (d) $c_2 = 2.0$ e (e) $c_2 = 3.0$ . . . . .	62
Figura 45 – (a) $ x_\perp _1$ ; (b) $ x_\perp _2$ ; e (c) $ x_\perp _s$ em função do nível de acoplamento $c = c_1 = c_2$ variando de 0.0 a 1.0. . . . .	62

Figura 46 – Séries temporais e retratos de fase, com $K_{22} = 1.0$ e $c_1 = c_2 = 4.0$ , das variáveis $x_{1,2,s}$ , $x$ , $z_{1,2,s}$ e $z$ : (a), (b) diretor 1, linha azul, e receptor, linha vermelha; (c), (d) diretor 2, linha verde, e receptor; e (e), (f) sinal soma, linha preta, e receptor. . . . .	63
Figura 47 – Série temporal das distâncias escalares: (a) $ x_{\perp} _1$ ; (b) $ x_{\perp} _2$ ; e (c) $ x_{\perp} _s$ .	64
Figura 48 – Histograma dos máximos locais do $ x_{\perp} _s$ com $c_1 = c_2 = 4.0$ e 1% de diferença entre os parâmetros dos osciladores. . . . .	64
Figura 49 – Histograma dos máximos locais do $ x_{\perp} _s$ do acoplamento com três osciladores diretores, onde os níveis de acoplamento $c_1 = c_2 = c_3 = 4.0$ e 1% de diferença entre os parâmetros dos osciladores. . . . .	65
Figura 50 – Séries temporais, esquerda, e retratos de fase, direita, com $K_{11} = K_{22} = 1.0$ : (a)-(c) diretor 1, linha azul, e <i>receptor</i> , linha vermelha; (e)-(f) diretor 2, linha verde, e receptor; e (g)-(i) sinal soma, linha preta, e receptor. . . . .	66
Figura 51 – Série temporal das distâncias escalares: (a) $ x_{\perp} _1$ ; (b) $ x_{\perp} _2$ ; e (c) $ x_{\perp} _s$ .	67
Figura 52 – Gráfico dos $ x_{\perp} _{max_s}$ , quadrado preto, e $ x_{\perp} _{rms_s}$ , círculo vermelho, em função dos níveis de acoplamento, $c_1 = c_2 = c$ , variando entre 0.0 e 1.0.	67
Figura 53 – Sistema G-B. Na esquerda, $i = 1$ ; centro, $i = 2$ ; direita, $i = s$ . Com $c_1 = 1.0$ , fixo, e variamos $c_2$ : $x \times x_i$ (a) $c_2 = 0.0$ , (b) $c_2 = 0.25$ , (c) $c_2 = 0.50$ , (d) $c_2 = 0.75$ , (e) $c_2 = 1.0$ . Com $c_2 = 1.0$ , fixo, e variamos $c_1$ : (f) $c_1 = 0.0$ , (g) $c_1 = 0.25$ , (h) $c_1 = 0.50$ , (i) $c_1 = 0.75$ , (j) $c_1 = 1.0$ . . . .	68
Figura 54 – Trajetórias dos três osciladores <i>diretor 1</i> (linha azul), <i>diretor 2</i> (linha verde) e <i>receptor</i> (linha vermelha): (a) caso 1, com $R_1 = 1.3000$ , $R_2 = 1.3000$ , $R_3 = 0.1900$ ; (b) caso 2, parâmetros iguais ao do item (a); (c) e (d) caso 3, com $R_1 = 1.3000, 1.2890, 1.2880$ , $R_2 = 1.3000, 1.290, 1.287$ e $R_3 = 0.1900, 0.1889, 0.1887$ . . . . .	70
Figura 55 – Diagrama esquemático para o acoplamento de um oscilador caótico com o sinal soma de N osciladores diretores. . . . .	71
Figura 56 – Autovalores máximos da trajetória $\mathbf{X}_s$ , calculados para: (a), (b) e (c) com $N = 2$ ; (d), (e) e (f) com $N = 4$ . Sendo (a), (d) com $c = 0.10$ ; (b), (e) com $c = 0.20$ ; e (c), (f) com $c = 0.25$ . . . . .	76
Figura 57 – (a) $\Lambda \times c$ , para diferentes números de <i>diretores</i> : $N = 1$ (quadrados pretos), $N = 2$ (círculos vermelhos), $N = 4$ (triângulos para cima verdes), $N = 6$ (triângulos para baixo azuis), $N = 8$ (losangos cianos) e $N = 10$ (triângulos para a esquerda magenta). (b) $\Lambda \times N$ : $c = 0.1$ (quadrados pretos), $c = 0.2$ (círculos vermelhos), $c = 0.4$ (triângulos para baixo verdes) e $c = 0.6$ (triângulos para baixo azuis). . . . .	76

Figura 58 – Sistema G-B, com $c_1 = c_2 = \dots = c_{10} = c = 1.0$ : Retrato de fase das variáveis, $x_s \times x$ , lado esquerdo, $y_s \times y$ , no centro, $z_s \times z$ , lado direito. Com (a) $n = 2$ ; (b) $n = 4$ ; (c) $n = 6$ ; (d) $n = 8$ ; (e) $n = 10$ . . . . .	77
Figura 59 – Série temporal: (a) $ x_{\perp} _s$ , com $n = 2$ ; (b) $ x_{\perp} _s$ , com $n = 6$ ; e (c) $ x_{\perp} _s$ , com $n = 10$ . . . . .	78
Figura 60 – Convergência do oscilador receptor com o sinal soma, variando o valor de $c$ de 0.0 até 1.0: (a) $ x_{\perp} _{max_s}$ e (b) $ x_{\perp} _{rms_s}$ , para $n = 2$ (quadrados pretos), $n = 4$ (círculos vermelhos) e $n = 10$ (triângulos azuis). . . . .	79
Figura 61 – $ x_{\perp} _{rms_s}$ em função de $N$ , com $N^{-\alpha}$ , reta vermelha, onde $\alpha = 1.2$ . . .	79
Figura 62 – Sistema de Lorenz, com $c$ : Séries temporais das variáveis $x_s$ e $x$ , lado esquerdo, $y_s$ e $y$ , no centro, $z_s$ e $z$ , no lado direito: (a) $n = 2$ ; (b) $n = 4$ ; (c) $n = 6$ ; (d) $n = 8$ ; (e) $n = 10$ . . . . .	81
Figura 63 – Sistema de Lorenz, com $c$ : Retratos de fase das variáveis $x_s \times x$ , lado esquerdo, $y_s \times y$ , no centro, $z_s \times z$ , no lado direito: (a) $n = 2$ ; (b) $n = 4$ ; (c) $n = 6$ ; (d) $n = 8$ ; (e) $n = 10$ . . . . .	82
Figura 64 – Fonte: Autor . . . . .	82
Figura 65 – Medida da convergência $ x_{\perp} _{rms_s}$ em função de $N$ variando de 2 até 50, com $K_{22} = K_{33} = 1.0$ e $c_1 = c_2 = \dots = c_{50} = c = 0.5$ . . . . .	82
Figura 66 – Sistema Gauthier-Bienfang: (a) diagrama esquemático e (b) sistema eletrônico. . . . .	84
Figura 67 – Sistema Gauthier-Bienfang. Séries temporais e Retratos de fase das variáveis $V_1$ , linha ciana, $V_2$ , linha amarela: (a), (b) Resultado experimental, imagem do osciloscópio, com amplitude de $500mV_{pp}$ e escala temporal de $250\mu s$ , onde a tela total consiste em $2500\mu s$ ; (c), (d) Resultado numérico, com a escala temporal ajustada para $\mu s$ . . .	84
Figura 68 – Verificação do funcionamento adequado dos osciladores eletrônicos. . . . .	85
Figura 69 – Diagrama esquemático do circuito somador com $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 100k\Omega$ , onde $A$ e $B$ são os op-amp do TL082. Todos os resistores todos iguais, o ganho será igual a 1.0 . . . . .	86
Figura 70 – Diagrama esquemático do amplificador de diferença. . . . .	87
Figura 71 – Diagrama esquemático do acoplamento. . . . .	88
Figura 72 – Acoplamento via $x$ ( $V_1$ ). Série temporal e retratos de fase das variáveis $y_1$ , $y_2$ , $y_s$ , linha amarela, e $y$ , linha ciana: (a)-(c) Resultado experimental, consiste nas imagens do osciloscópio com amplitude de $500mV_{pp}$ e a escala temporal de $250\mu s$ , a tela completa contém $2500\mu s$ ; (d)-(f) Resultados numéricos com a escala temporal ajustada para $\mu s$ . . . . .	90

Figura 73 – Acoplamento via $y$ ( $V_2$ ). Série temporal e retratos de fase das variáveis $x_1, x_2, x_s$ , linha amarela, e $x$ , linha ciana: (a)-(c) Resultado experimental, consiste nas imagens do osciloscópio com amplitude de $1V_{pp}$ e a escala temporal de $250\mu s$ , a tela completa contém $2500\mu s$ ; (d)-(f) Resultados numéricos com a escala temporal ajustada para $\mu s$ .	91
Figura 74 – Sincronização de um oscilador do sistema G-B com uma combinação linear de dois osciladores idênticos. Séries temporais e retratos de fase das variáveis $x_1, x_2, x_s$ e $x$ , linha vermelha: (a), (b) e (c) Resultados experimentais, linha preta; (d), (e) e (f) Resultados numéricos, linha azul. . . . .	92
Figura 75 – Fonte: Autor . . . . .	92
Figura 76 – Sincronização de um oscilador do sistema G-B com uma combinação linear de dois osciladores idênticos. Séries temporais e retratos de fase das variáveis $y_1, y_2, y_s$ e $y$ , linha vermelha: (a), (b) e (c) Resultados experimentais, linha preta; (d), (e) e (f) Resultados numéricos, linha azul. . . . .	92

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos parâmetros dos osciladores . . . . .	58
Tabela 2 – Valores dos componenetes dos osciladores . . . . .	89

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE DINÂMICA NÃO-LINEAR E CAOS</b>	<b>3</b>
<b>2.1</b>	<b>Sistemas Dinâmicos</b>	<b>3</b>
2.1.1	Pontos fixos e Estabilidade	7
<b>2.2</b>	<b>Caracterização do Caos</b>	<b>12</b>
2.2.1	Atrator estranho	12
2.2.2	Expoentes de Lyapunov	14
<b>2.3</b>	<b>Sistema de Lorenz</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS</b>	<b>21</b>
<b>3.1</b>	<b>Sincronização Completa</b>	<b>22</b>
<b>3.2</b>	<b>Sincronização de Fase</b>	<b>25</b>
<b>3.3</b>	<b>Sincronização com Atraso</b>	<b>27</b>
<b>3.4</b>	<b>Sincronização Antecipada</b>	<b>28</b>
<b>3.5</b>	<b>Sincronização Generalizada</b>	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>SISTEMA GAUTHIER-BIENFANG</b>	<b>32</b>
<b>4.1</b>	<b>Descrição e caracterização do sistema G-B</b>	<b>32</b>
4.1.1	Equações diferenciais características do sistema	33
4.1.2	Resistor negativo	35
4.1.3	Dispositivo não-linear	37
4.1.4	Comportamento do sistema G-B	38
4.1.5	Pontos fixos e diagrama de bifurcação	39
<b>4.2</b>	<b>Acoplamento entre dois osciladores</b>	<b>45</b>
4.2.1	Acoplamento através da variável $V_1$	47
4.2.2	Acoplamento através da variável $V_2$	50
4.2.3	Análise estatística dos eventos de dessincronismo	52
<b>5</b>	<b>SINCRONISMO DE UM OSCILADOR CAÓTICO COM UMA SUPER- POSIÇÃO DE SINAIS</b>	<b>56</b>
<b>5.1</b>	<b>Acoplamento via <math>V_1</math></b>	<b>58</b>
<b>5.2</b>	<b>Acoplamento via <math>V_2</math></b>	<b>62</b>
<b>5.3</b>	<b>Acoplamento simultâneo, <math>V_1</math> e <math>V_2</math></b>	<b>65</b>
5.3.1	Acoplamento com $K_{11} = K_{22} = 1.0$	65
5.3.2	Acoplamento com os osciladores em regime periódico	68
<b>5.4</b>	<b>Acoplamento na soma de N osciladores</b>	<b>70</b>

5.4.1	Análise teórica do sincronismo de um oscilador não-linear com uma superposição de sinais . . . . .	71
5.4.2	Acoplamento com N osciladores do sistema G-B . . . . .	74
5.4.3	Sistema de Lorenz . . . . .	79
<b>6</b>	<b>RESULTADOS EXPERIMENTAIS . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>6.1</b>	<b>Sistema eletrônico . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>6.2</b>	<b>Esquema para o acoplamento . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>6.3</b>	<b>Acoplamento e Resultados . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>94</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>96</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O crescente interesse pelo estudo de Sistemas Complexos interagentes resultou em investigações que exploram suas propriedades estatísticas (ALBERT; BARABÁSI, 2002; SORNETTE, 2007; NICOLIS; NICOLIS, 2012; CAVALCANTE et al., 2013), de conectividade (BOCCALETTI et al., 2006; STROGATZ, 1994; NEWMAN, 2003; CHOI; MIHALAS, 2019) ou ainda de sincronização (ARENAS et al., 2008; PECORA et al., 2014). Comportamentos dinâmicos desses sistemas complexos foram evidenciados em sistemas pertencentes a áreas diversas como, por exemplo, as ciências físicas, biológicas, sociais e suas aplicações tecnológicas. Esses estudos estão frequentemente associados a processos em Sistema Dinâmicos, explorando os aspectos não-lineares desses sistemas. Rompendo o paradigma de uma visão estruturalmente newtoniana e abrindo novos caminhos para entendermos os fenômenos da Natureza, que fogem da característica linear.

A sincronização, por exemplo, em redes neurais (PECORA et al., 2014; XU et al., 2018; CHAKRAVARTULA et al., 2017) foi investigada considerando que os sistemas neurais estão globalmente conectados com cada grupo de uma parte da rede recebendo e enviando sinais através de arquiteturas complexas (BULLMORE; SPORNS, 2009; FRISTON; HARRISON; PENNY, 2003). Nota-se, porém, que, individualmente, cada neurônio possui uma configuração de conexão muito assimétrica, com um número muito grande de entradas e uma única saída em cada nó da rede (neurônio) (DEBANNE et al., 2011; HUANG; RASBAND, 2018). Desta forma, torna-se importante investigar configurações com uma saída única em estudos de sincronização de rede. A sincronização é crucial em sistemas complexos, como sistemas neurais e cardíacos (SCHÄFER et al., 1998; SHIOGAI; STEFANOVSKA; MCCLINTOCK, 2010), e para aplicações em comunicações baseadas no caos (CUOMO; OPPENHEIM, 1993; ARGYRIS et al., 2005; KEUNINCKX et al., 2017) ou em estudos de eventos extremos (CAVALCANTE et al., 2013; MISHRA et al., 2018).

Os primeiros trabalhos com sistemas não-lineares acoplados demonstraram que um oscilador caótico pode convergir para uma solução particular, da trajetória de um oscilador idêntico a ele acoplado. Essa convergência pode ocorrer quando a informação do oscilador, que irá guiar a dinâmica do outro, é fornecida através da troca de uma variável, ou seja, substituindo uma variável (PECORA; CARROLL, 1990), ou pelo envio de informações de maneira aditiva, por meio de um termo linear (GAUTHIER; BIENFANG, 1996) adicionado ao oscilador guiado.

O trabalho descrito nesta dissertação está inserido no contexto que apresentamos acima de sistemas complexos acoplados. Assim, mostraremos aqui, usando

resultados numéricos e experimentais, que é possível conduzir um sistema não-linear a uma nova trajetória definida por uma combinação linear de sinais de osciladores idênticos. Essa convergência foi observada, como apresentaremos nos capítulos posteriores, adicionando informações parciais de possíveis trajetórias ao fluxo do oscilador receptor. Além disso, a trajetória do sistema converge melhor para o sinal da soma quando o número de trajetórias adicionadas aumenta. Esta sincronização com múltiplas trajetórias abre novas perspectivas na investigação de sistemas complexos acoplados e parece ser particularmente relevante para a análise de redes neurais, uma vez que múltiplas entradas conectadas a uma única saída é uma configuração neural prevalente em sistemas biológicos, como sistema nervoso.

Esta dissertação está organizada em sete capítulos:

- Capítulo 1: Uma breve introdução do contexto que motiva o trabalho;
- Capítulo 2: Revisamos alguns fundamentos da Dinâmica Não-Linear e Caos, particularmente os conceitos necessários para as discussões que seguem;
- Capítulo 3: Apresentamos os principais tipos de sincronização observadas em sistemas caóticos acoplados;
- Capítulo 4: Caracterizamos e exploramos a dinâmica do sistema não-linear escolhido como plataforma de estudo deste trabalho;
- Capítulo 5: Discutimos os principais resultados numéricos da configuração original de acoplamento aditivo unidirecional com mais de um oscilador diretor acoplado à um oscilador receptor;
- Capítulo 6: Apresentamos o sistema eletrônico que implementa o sistema não-linear, utilizado na investigação numérica, e os resultados experimentais do acoplamento com mais de um oscilador diretor, que confirmam nossos cálculos numéricos;
- Capítulo 7: Expomos nossas considerações finais do trabalho desenvolvido.

## 2 REVISÃO DE DINÂMICA NÃO-LINEAR E CAOS

A Física, desde o século XVI, tem sido marcada, em sua história, por revoluções científicas que impulsionaram significativamente o seu progresso enquanto ciência. A Mecânica Quântica, a Teoria da Relatividade e o Eletromagnetismo são alguns exemplos dessas revoluções. Mudando o nosso entendimento da Natureza enquanto tal e a nossa relação com ela. Como resultado desse processo, nos trouxe grandes avanços científicos e tecnológicos. Durante a ocorrência desses marcos históricos da Física, uma outra concepção estava se estabelecendo, iniciada pelo problema de três corpos, a Teoria do Caos. Colocando em xeque a crença determinística da Natureza. Laplace, no século XIX, acreditava que seríamos capazes de prever tudo, caso tivéssemos conhecimento, em um determinado instante, de todas as forças e de todos os estados do Universo. Isso poderia ser verdade, se o Caos não limitasse a nossa capacidade de previsibilidade. Então, por que não considerá-lo nessa lista de revoluções da Física?

Embora haja diversas classes de problemas e sistemas físicos para os quais nossa limitada capacidade de modelagem mostra-se eficiente, por exemplo, como prever quando eclipses solares irão ocorrer com data e hora precisas, porém, a maior parte dos fenômenos da Natureza são descritos por uma dinâmica não-linear. Por isso, nos motivamos a estudar os sistemas dinâmicos não-lineares. Os estudos desses sistemas cresceram exponencialmente, desde a década de 1960, com o avanço no desenvolvimento de recursos computacionais, que tornaram-se indispensáveis para a pesquisa em Dinâmica Não-Linear.

Nas próximas seções iremos discutir alguns conceitos fundamentais da Dinâmica Não-Linear necessários para o trabalho desenvolvido nesta dissertação. Na seção (2.1), iremos, brevemente, conceituar Sistemas Dinâmicos como fundamento geral para os sistemas não-lineares, discutindo a respeito dos Pontos fixos e Estabilidade (subseção (2.1.1)). Na seção (2.2), vamos abordar a caracterização da dinâmica caótica, a qual apresenta Atratores estranhos (subseção (2.2.1) e Expoentes de Lyapunov (subseção (2.2.2)). Na seção (2.3), finalizaremos o capítulo apresentando o sistema de Lorenz como exemplo de sistema não-linear com comportamento caótico.

### 2.1 SISTEMAS DINÂMICOS

A Dinâmica, que trata da mudança de estado de um sistema em função do tempo, hoje em dia, é um área interdisciplinar, mas originalmente era um assunto exclusivo da Física. Inicializada por Aristóteles, passando por Nicolau Copérnico, Johannes Kepler, Galileu Galilei e Isaac Newton. Com este último, nos deparamos com o problema

de três corpos que envolvia a Mecânica Celeste (STROGATZ, 1994). Estudando este problema, Henri Poincaré foi, praticamente, um dos primeiros a vislumbrar o comportamento caótico, conforme ele expressa: “... *pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes diferenças no fenômeno final. Um pequeno erro na entrada produzirá um erro enorme na saída. Previsão torna-se impossível ...*”(MONTEIRO, 2011). Assim, o início da Dinâmica Não-Linear coincide com o histórico problema da Mecânica Celeste.

Entendemos por sistema dinâmico determinístico aquele que pode ser descrito por equações diferenciais cuja evolução temporal seja ela contínua ou discreta no tempo. Podemos classificar um sistema dinâmico como autônomo, quando não depende explicitamente do tempo, por exemplo, um oscilador harmônico simples<sup>1</sup>, ou não-autônomo, quando depende explicitamente do tempo, por exemplo, um oscilador harmônico forçado<sup>2</sup>. Quando a descrição matemática apresenta termos não-lineares, deixando de corresponder ao princípio da superposição, chamamos de sistemas não-lineares (STROGATZ, 1994; MONTEIRO, 2011; JUNIOR, 2018). Por exemplo, equações que apresentam termos quadráticos, cúbicos, exponenciais, logarítmicos, do tipo seno ou cosseno são equações não-lineares.

Sistemas não-lineares são complexos e difíceis de serem resolvidos analiticamente. Além disso, a solução pode ser complicada de interpretar. Diante dessa problemática, recorreremos aos recursos computacionais, como métodos numéricos do tipo Runge-Kutta, para estudar esses sistemas. Tomamos como exemplo uma equação não-linear do tipo seno:

$$\frac{dx}{dt} \dot{x} = \text{sen}(x). \quad (2.1)$$

Vamos tentar resolver analiticamente a Eq. (2.1). Para isso, separemos as variáveis e em seguida integramos:

$$dt = \frac{dx}{\text{sen}(x)},$$

isso implica que

$$t = \int \text{cosec}(x) dx = -\ln|\text{cosec}(x) + \text{cotg}(x)| + C, \quad (2.2)$$

onde C é um valor constante. Supomos que  $x(t = 0) = x_0$  e  $t = 0$ , substituindo na Eq. (2.2) teremos  $C = \ln|\text{cosec}(x_0) + \text{cotg}(x_0)|$ . Agora, substituindo C na Eq. (2.2),

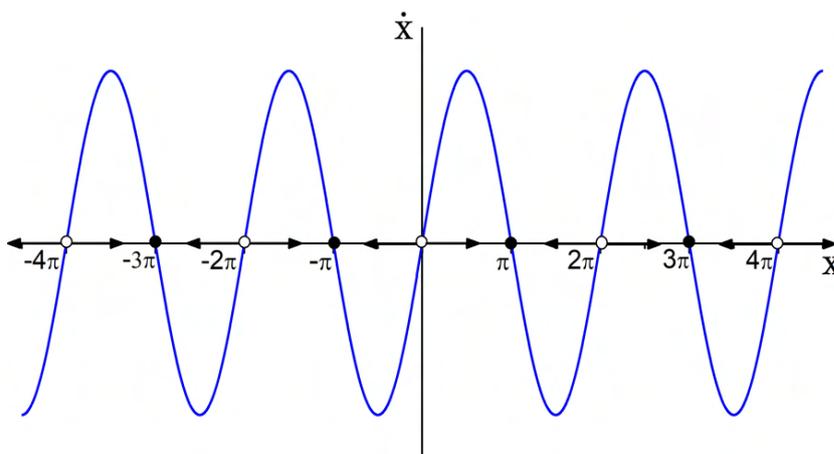
- 
- <sup>1</sup> Oscilador harmônico simples é descrito pela equações:  $\frac{d^2x}{dt^2} = -kx/m$ , onde  $m$  é a massa e  $x$  a posição
- <sup>2</sup> Oscilador harmônico forçado é descrito pela equações:  $ma + bv + kx = F\cos(t)$ , onde  $a$  é aceleração,  $m$  a massa,  $v$  a velocidade,  $x$  a posição e  $F$  a força externa.

obtemos a solução

$$t = \ln \left| \frac{\operatorname{cosec}(x_0) + \cotg(x_0)}{\operatorname{cosec}(x) + \cotg(x)} \right|. \quad (2.3)$$

A solução da Eq. (2.1) expressa em  $t$ , Eq. (2.3), é difícil de interpretar, inviabilizando uma intuição do comportamento do sistema. Por exemplo, qual seria o comportamento de  $x(t)$ , para qualquer condição inicial com  $t \rightarrow \infty$ ? No entanto, podemos analisar graficamente  $\dot{x}$  em função de  $x$ , como está apresentado na Fig. (1). Façamos um rápido exercício imaginativo. Consideremos uma partícula se movendo, onde  $\dot{x}$  seja a velocidade e  $x$  a posição. Assim,  $\dot{x}$  representa o campo vetorial ou o fluxo. Note que o fluxo, representado pelas setas, “flui” para a direita quando  $\dot{x} > 0$  e para a esquerda quando  $\dot{x} < 0$ . Na origem, onde  $\dot{x} = 0$ , não existe fluxo para nenhum dos lados. Esses pontos são chamados de pontos de equilíbrio, que podem ser estáveis ou instáveis, representados pelo círculos pretos e brancos, respectivamente. Trataremos mais a respeito desses pontos na subseção seguinte (2.1.1). A partir do comportamento do fluxo, podemos interpretar que a evolução temporal conduz o sistema para os pontos estáveis.

Figura 1 – Solução da função  $\dot{x}$  com  $x$  variando de  $-4.5\pi$  à  $4.5\pi$ .

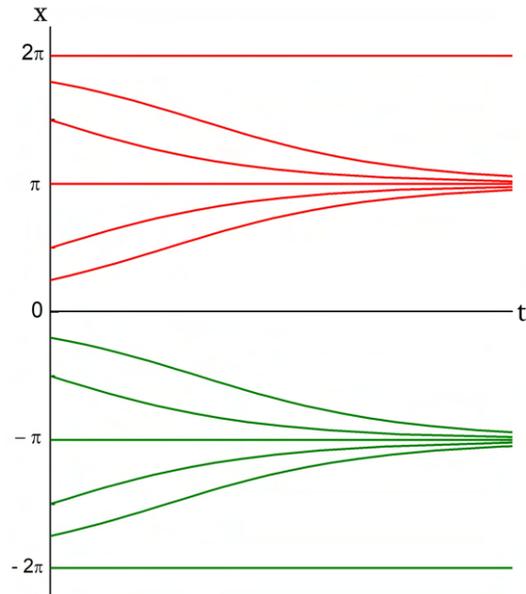


Fonte: Autor

Se conhecermos a condição inicial  $e$ , assim, obtermos os valores de  $t$  (2.3), que é a solução de  $\dot{x}$ , poderemos construir um gráfico de  $x$  em função da solução  $t$ , para  $t > 0$ . Consideramos algumas condições iniciais,  $x_0$ , que possa assumir valores positivos e negativos, tais como  $(\pm\pi/4, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm1.5\pi, \pm1.8\pi, \pm2\pi)$ . Substituindo cada valor atribuído a  $x_0$  em  $t$ , teremos a solução apresentada na Fig. (2). Note que se uma condição inicial for dada na região positiva de  $x$ ,  $0 < x_0 < 2\pi$ , e na vizinhança de um ponto de equilíbrio ( $\pi$ ), a trajetória do sistema evolue no tempo tendendo, assintoticamente, para esse ponto. Da mesma maneira ocorre, se a condição inicial for na região negativa de  $x$ ,  $-2\pi < x_0 < 0$ , ou seja, a trajetória do sistema se aproxima do

ponto de equilíbrio,  $-\pi$ . Porém, se a condição inicial for dada no ponto de equilíbrio,  $\pm\pi$ , a trajetória permanece nele indefinidamente [6].

Figura 2 – Solução da função  $\dot{x}$  com  $x$  variando de  $-4.5\pi$  à  $4.5\pi$ .



Fonte: Autor

A discussão que realizamos entorno da equação não-linear (2.1), pode ser expandida para sistemas de dimensões maiores. Por exemplo, representemos um sistema não-linear autônomo  $n$ -dimensional por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem,

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.4a)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.4b)$$

$$\vdots \quad (2.4c)$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

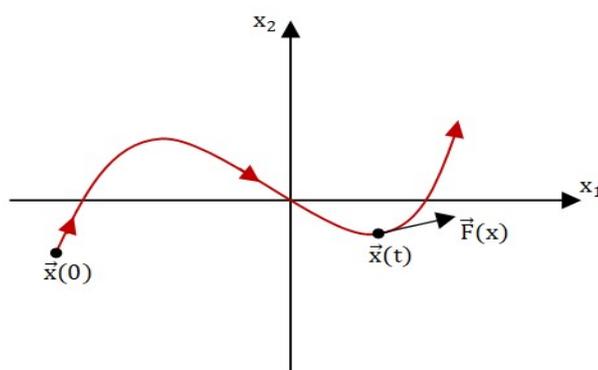
A dimensionalidade do sistema está relacionada com a quantidade de condições iniciais necessárias para representar um estado do sistema, em um determinado instante de tempo  $t$ . O exemplo que trabalhamos acima, Eq. (2.1), possui uma única dimensão, portanto, necessita apenas de uma condição inicial.

Podemos analisar um sistema  $n$ -dimensional é recorrendo ao espaço de estado [1]. Esse espaço de estado é formado pelas  $n$ -variáveis do sistema, que compõe os seus eixos  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . A Eq. (2.4) pode ser reescrita na sua forma vetorial,

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}), \quad (2.5)$$

onde  $\vec{F}$  é o fluxo do sistema. De acordo com o Teorema de Existência e Unicidade [1, 2], tomando todas as derivadas parciais de  $\vec{F}$ ,  $\partial F_i / \partial x_j$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , contínuas para  $\vec{x}$  em algum conjunto aberto  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Então, para  $\vec{x}_0 \in D$ , teremos uma solução única em algum intervalo de tempo  $(-\tau, \tau)$  em torno de  $t = 0$ . Ou seja, para cada condição inicial dada ao sistema, obtemos uma solução única. Em outras palavras, teremos trajetórias diferentes no espaço de estado, para condições iniciais diferentes. Logo, cada estado de  $\vec{x}(t)$  representa um único ponto nesse espaço e sua evolução temporal é descrita por uma trajetória ou uma órbita, como está representado na Fig. (3).

Figura 3 – Trajetória no espaço de estado bidimensional.



Fonte: Autor

Ainda segundo o Teorema de Existência e Unicidade, como todo ponto em  $D$  pode ser uma condição inicial, as trajetórias nunca se interceptam. Caso duas trajetórias se interceptassem, então, teríamos duas soluções, ao invés de uma. Isso violaria parte do teorema, envolvendo um emaranhado de curvas cruzadas. Portanto, uma trajetória não pode se mover em duas direções diferentes [6].

### 2.1.1 PONTOS FIXOS E ESTABILIDADE

Conforme vimos na seção anterior, os pontos equilíbrio são pontos no espaço de estado que determina a evolução temporal da trajetória do sistema. Esses pontos representam as soluções estacionárias, onde o sistema para de movimentar-se (STROGATZ, 1994; MONTEIRO, 2011). Esse equilíbrio pode ser estável, se ele não altera seu estado com pequenas perturbações ao longo do tempo, ou instável, onde as perturbações crescem com o tempo. Podemos representar geometricamente como pontos fixos. Logo, teremos pontos fixos estáveis e instáveis. De uma forma geral, os pontos fixos são classificados em:

- Atratores: as trajetórias que passam pela vizinhança desse ponto são atraídos a convergirem para ele. No caso de um sistema unidimensional, são pontos fixos estáveis. Com duas ou mais dimensões, podem ser nós estáveis ou espirais

estáveis, Fig. (5a) e Fig. (5c), respectivamente. Na literatura, esse ponto atrativo é representado por pontos cheios (●) ou linhas cheias;

- Repulsores: as trajetórias que passam pela vizinhança desse ponto divergem dele. Para um sistema unidimensional são pontos fixos instáveis. Com duas dimensões ou mais, podem ser nós instáveis ou espirais instáveis, Fig. (5b) e Fig. (5d), respectivamente. Representado por pontos vazios ou linhas tracejadas;
- Pontos de sela: as trajetórias que passam pela vizinhança desse ponto podem convergir ou divergir dele, dependendo da região, Fig. (6). Eles só existem em sistemas com duas ou mais dimensões.

Figura 4 – Classificação dos pontos fixos: nó (a) estável e (b) instável; espiral (c) estável e (d) instável.

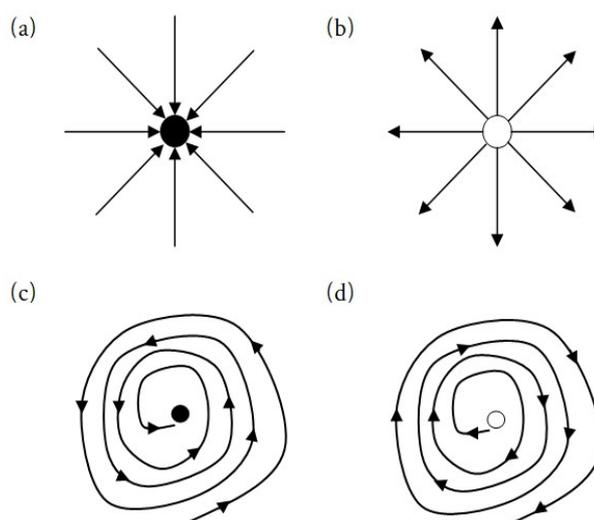
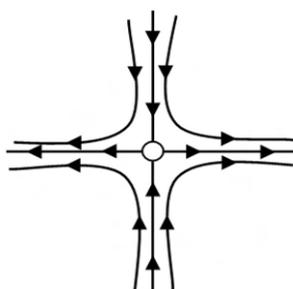


Figura 5 – Fonte: Autor

Figura 6 – Ponto de sela em espaço bidimensional.

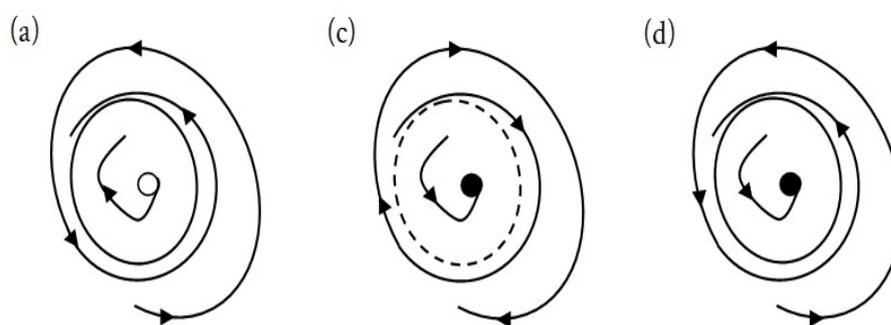


Fonte: Autor

Para sistemas com espaço de estado de duas ou mais dimensões é possível que apresente comportamento periódico, de maneira que as trajetórias, na sua evolução

temporal, venha a convergir ou divergir para órbitas fechadas, a isso chamamos de ciclo (STROGATZ, 1994; JUNIOR, 2018). Esses ciclos podem apresentar um estado de equilíbrio estável, instável ou semi-instável. No caso em que um ciclo seja isolado, ou seja, as trajetórias não são fechadas, teremos um ciclo limite. Se as trajetórias da vizinhança aproximarem-se, esse ciclo limite será estável, Fig. (7a). Na situação inversa, ou seja, se elas divergem, o ciclo limite é instável, Fig. (7b). No caso misto, ou seja, se as trajetórias de uma região se aproximam e as da outra divergem dela, dizemos que o ciclo limite é semi-estável, Fig. (7c).

Figura 7 – Ciclo limite: (a) estável, (b) instável e (c) semi-estável.



Fonte: Autor

De acordo com o Teorema de Poincaré-Bendixson (STROGATZ, 1994; MONTEIRO, 2011), qualquer trajetória de um sistema com espaço de estado de duas dimensões, que inicia em uma determinada região  $R$ , limitada e invariante, ou seja, começa em  $R$  e permanece em  $R$  para todo o tempo futuro, tende para um ponto fixo ou um ciclo limite quando  $t \rightarrow \infty$ . Portanto, o teorema estabelece um resultado central da dinâmica não-linear: não existe caos em sistemas bidimensionais.

Até o momento temos analisado a estabilidade dos pontos fixos de um ponto de vista qualitativo. Porém, a seguir, iremos analisar quantitativamente a estabilidade desses pontos. Para isso, utilizaremos o método da linearização de sistemas não-lineares. Realizamos a linearização através da expansão da série de Taylor entorno do ponto fixo em análise. Identificaremos um ponto fixo por meio do símbolo  $*$ ,  $x^*$ . Tomemos, como exemplo, um sistema de duas dimensões,

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (2.6a)$$

$$\dot{y} = g(x, y). \quad (2.6b)$$

Vamos expandir a Eq. (2.6) entorno do ponto fixo  $(x^*, y^*)$ ,

$$\dot{x} = f(x, y) = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + O \quad (2.7a)$$

$$\dot{y} = g(x, y) = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) + O, \quad (2.7b)$$

onde  $O$  representa os termos de ordem superior, os quais serão desconsiderados a seguir. Vamos determinar a estabilidade do ponto fixo  $(x^*, y^*)$  tomando um ponto diferente, tal que,  $(x(t), y(t)) = (x^* + \delta_x(t), y^* + \delta_y(t))$  e explorar a sua evolução temporal por meio dessa diferença infinitesimal  $(\delta_x(t), \delta_y(t))$ . Essa diferença nada mais é do que uma pequena perturbação que pode crescer ou diminuir. Caso  $(\delta_x(t), \delta_y(t))$  venha a crescer, isso significa que a trajetória do sistema,  $(x(t), y(t))$ , irá divergir do ponto fixo. Na situação inversa, ou seja,  $(\delta_x(t), \delta_y(t))$  diminua, a trajetória convergirá para o ponto fixo. Assim, as componentes dessa pequena perturbação são

$$\delta_x = x - x^* \quad (2.8a)$$

$$\delta_y = y - y^*. \quad (2.8b)$$

Se derivarmos a Eq. (2.8), teremos que  $\dot{\delta}_x = \dot{x} = f(x, y)$  e  $\dot{\delta}_y = \dot{y} = g(x, y)$ . Utilizando essas novas derivadas, considerando que o ponto fixo seja  $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$  e os termos de ordem superior da expansão sejam suficientemente pequenos, de maneira que possamos desconsiderá-los, então, reescrevemos a Eq. (2.7),

$$\dot{\delta}_x = \delta_x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^*, y^*} + \delta_y \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x^*, y^*} \quad (2.9a)$$

$$\dot{\delta}_y = \delta_x \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x^*, y^*} + \delta_y \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{x^*, y^*}, \quad (2.9b)$$

onde  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}$  são as derivadas parciais calculadas no ponto fixo  $(x^*, y^*)$ . Assim, podemos reescrever, mais uma vez, a expansão, Eq. (2.9), na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_x \\ \dot{\delta}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix},$$

onde

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

é a matriz Jacobiana do sistema linearizado entorno do ponto fixo  $(x^*, y^*)$ . A partir da matriz Jacobiana, podemos calcular os autovalores e, então, determinar a estabilidade do ponto fixo. Vamos calcular o determinante  $\det(J - \lambda I) = 0$ ,

$$\det = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

resolvendo esse determinante, iremos obter um polinômio  $\lambda^2 - A\lambda + \Delta = 0$ , onde  $A = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$  e  $\Delta = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$ . Portanto, os autovalores da matriz Jacobiana são  $\lambda_{1,2} = (A \pm \sqrt{A^2 - 4\Delta})/2$ ,  $A = \lambda_1 + \lambda_2$  e  $\Delta = \lambda_1 \lambda_2$ . Definir a estabilidade do ponto fixo dependerá dos valores de  $A$  e  $\Delta$ . Consideremos que

1. Se  $\Delta < 0$ , teremos autovalores,  $\lambda_{1,2}$ , reais com sinais opostos, logo, o ponto fixo será do tipo sela, ou seja, instável. As trajetórias irão se aproximar por uma direção e divergir por outra;
2. Se  $\Delta > 0$ , de forma que  $A^2 - 4\Delta$  também seja maior que zero, os autovalores,  $\lambda_{1,2}$ , serão reais e de mesmo sinal. Assim, teremos um nó estável com  $A < 0$ , as trajetórias convergem para esse ponto, e um nó instável com  $A > 0$ , as trajetórias divergem desse ponto;
3. Se  $\Delta > 0$ , mas  $A^2 - 4\Delta < 0$ , os autovalores,  $\lambda_{1,2}$ , são complexos conjugados. Caso  $A > 0$ , o ponto fixo será um foco instável, as trajetórias espiralam divergindo do ponto, e um foco assintoticamente estável com  $A < 0$ , as trajetórias espiralam convergindo para o ponto. Na situação em que  $A = 0$ , o ponto fixo será um centro neutramente estável, as trajetórias nem divergem e nem convergem para o ponto.

A análise da estabilidade dos pontos fixos, que realizamos acima, com o sistema de duas dimensões pode ser expandido para sistemas de dimensões maiores. Levando em consideração que estamos tratando de sistemas não-lineares, portanto, as correções dos termos de ordem superior, da expansão da série de Taylor, devem ser realizadas a depender de como estamos caracterizando um ponto fixo (STROGATZ, 1994; JUNIOR, 2018).

Até aqui nós temos explorado a dinâmica dos sistemas não-lineares, basicamente, para diferentes condições iniciais. No entanto, o sistema não-linear pode alterar seu comportamento, inclusive a posição dos pontos fixos e a estabilidade, mediante a mudança de parâmetro desse sistema. É a respeito dessa mudança na dinâmica que iremos discutir na próxima subseção.

## 2.2 CARACTERIZAÇÃO DO CAOS

Na seção anterior, vimos que o Teorema de Poincaré-Bendixson demonstra como o caos não pode ser observado em sistema de duas dimensões. Portanto, trataremos do caos relacionado a sistemas não-lineares de três dimensões ou mais. Também vimos que, na vizinhança dos pontos fixos, a mudança de parâmetro altera a evolução temporal das trajetórias do sistema. No entanto, essa alteração, que depende do ajuste do parâmetro, pode conduzir o sistema a torna-se imprevisível ao longo do tempo. Para esse tipo de dinâmica, dar-se o nome de dinâmica caótica ou regime caótico (STROGATZ, 1994; MONTEIRO, 2011).

Não há um consenso universal para definir caos (STROGATZ, 1994), porém, para este trabalho vamos relacionar sua definição com as características fundamentais para que esse tipo de regime ocorra. Deste modo, para que um sistema dinâmico apresente comportamento caótico, no seu espaço de estado, é necessário que ele possua as seguintes características:

- Seja determinístico: o sistema deve ser descritos por equações diferenciais;
- Não apresente termos estocásticos: o sistema não possui termos em suas equações que possam conduzi-lo para uma dinâmica aleatória;
- Imprevisível a longo prazo: sensibilidade exponencial às condições iniciais. Para cada condição inicial diferente, obtemos uma trajetória diferente;
- Que tenha um comportamento aperiódico: isso significa que existe trajetórias que não convergem para pontos fixos, órbitas periódicas ou quase-periódicas, mas convergem para um atrator estranho (tratemos dele mais adiante).

Sistemas não-lineares do tipo conservativo podem apresentar dinâmica caótica, porém, não contém um atrator estranho no seu espaço de estado. No tipo dissipativo, a solução pode exibir um atrator no espaço de estado (STROGATZ, 1994; JUNIOR, 2018). Para isso, algumas condições precisam ser atendidas, trataremos delas na próxima subseção (2.2.1). Outro sim, a evolução temporal de duas trajetórias inicializadas com condições iniciais ligeiramente diferentes divergem exponencialmente. Podemos medir essa divergência através do expoente de Lyapunov, o qual abordaremos na subseção (2.2.2).

### 2.2.1 ATRATOR ESTRANHO

O efeito atrativo é um fenômeno comum em sistemas dinâmicos. Nós vimos na seção (2.1) que existem pontos fixos atrativos para onde as trajetórias do sistema convergem e a velocidade é nula. O campo gravitacional ou cargas positivas atraindo

as negativas são exemplos clássicos desse efeito. No entanto, existem soluções de sistemas não-lineares, que embora possam convergir para órbitas periódicas, que comportam-se irregularmente (STROGATZ, 1994; MONTEIRO, 2011).

Para que um determinado sistema dinâmico apresente, em seu espaço de estado, um atrator é necessário que:

- Tenha um conjunto invariante: qualquer trajetória que comece no conjunto, por exemplo,  $A$  permanecerá em  $A$  em todo instante de tempo;
- Que o conjunto invariante atraia um conjunto aberto de condições iniciais: ou seja, o conjunto  $A$  atrai um conjunto aberto  $B$  de modo que, uma solução obtida com qualquer condição inicial pertencente a  $B$  e outra solução com condição inicial pertencente a  $A$ , a diferença entre as duas soluções tende a zero com  $t \rightarrow \infty$ . O maior conjunto de condições iniciais que atenda a essa condição, chamamos de bacia de atração de  $A$ ;
- O conjunto invariante seja mínimo: isso quer dizer que o conjunto  $A$  não pode ter subconjuntos que satisfaçam as condições anteriores.

Os sistemas não-lineares de três dimensões podem apresentar três tipos de soluções atratoras:

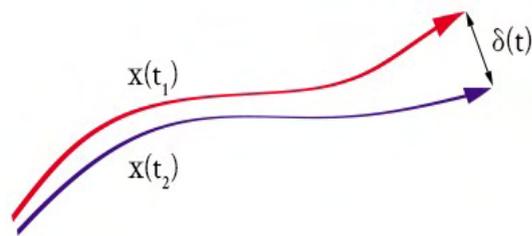
1. Periódica com uma frequência independente;
2. Multiperódica com duas ou três frequências independentes;
3. Estranha/Caótica com uma banda de frequência e sensível às condições iniciais;
4. Pontos Fixos.

Portanto, um sistema dinâmico não-linear, dependendo do ajuste do parâmetro, terá a evolução temporal da suas trajetórias conduzidas à uma região de um atrator estranho. Esse atrator é uma figura geometricamente fractal, ou seja, apresenta detalhes em uma escala infinitesimalmente pequena (STROGATZ, 1994; MONTEIRO, 2011). Então, podemos dizer que esse sistema possui uma dinâmica caótica. O termo atrator estranho foi cunhado por D. Ruelle e F. Takens, em 1971, quando ambos estavam trabalhando com o processo de transição de fluxo laminar para o fluxo turbulento em fluidos (MONTEIRO, 2011). O atrator estranho exibe sensibilidade às condições iniciais, significa que qualquer par de trajetórias iniciadas em pontos ligeiramente diferentes irão divergir exponencialmente. Essa divergência pode ser medida e iremos discutí-la na próxima subseção.

### 2.2.2 EXPOENTES DE LYAPUNOV

Na subseção anterior, discutimos as condições para que um sistema dinâmico apresente caos em seu comportamento. Além disso, contenha uma figura em seu espaço chamada de atrator estranho. Na presença desse atrator, as trajetórias iniciadas em pontos distintos, mas ligeiramente próximos, divergem um do outro. A Fig. (8) ilustra qualitativamente essa divergência. Com o expoente de Lyapunov podemos medir essa divergência (STROGATZ, 1994) e é sobre ele que iremos tratar nesta subseção.

Figura 8 – Demonstração qualitativa da divergência exponencial de duas trajetórias obtidas com condições iniciais diferentes.



Fonte: Autor

O expoente de Lyapunov é definido, basicamente, como uma taxa com que as trajetórias divergem entre si. A quantidade de expoentes está relacionada com a dimensionalidade do sistema. Por exemplo, um sistema bidimensional tem dois expoentes, um sistema tridimensional tem três expoentes e assim por diante. Eles podem assumir tanto valores positivos, negativos, zeros ou até mesmo complexos (STROGATZ, 1994; JUNIOR, 2018).

A expressão  $\delta$  apresentada na Fig. (8), que representa o comportamento divergente entre as duas trajetórias, é descrita como

$$|\delta(t)| \approx |\delta(0)|e^{\lambda t}, \quad (2.10)$$

onde  $\lambda$  é o expoente de Lyapunov. Se reescrevermos a Eq. (2.10) e aplicarmos a propriedade logaritma, obtemos que

$$\frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} = e^{\lambda t} \quad (2.11)$$

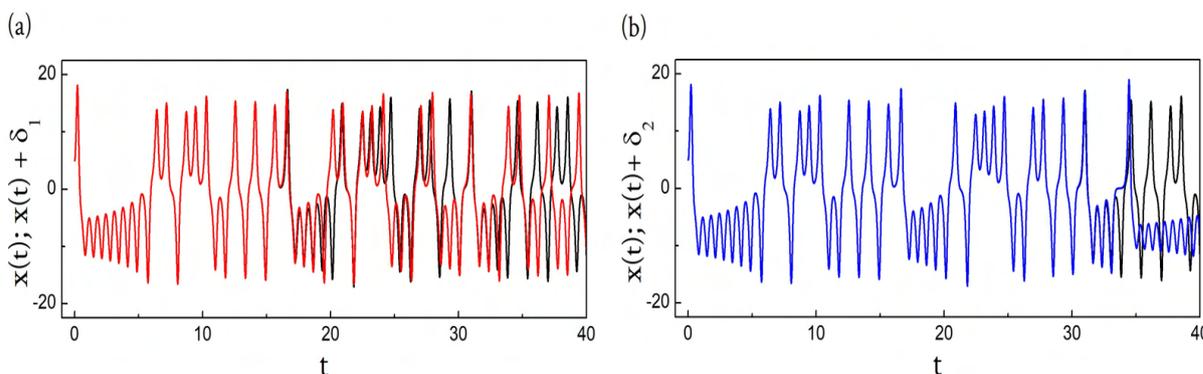
$$\ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|} = \ln (e^{\lambda t})$$

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta(t)|}{|\delta(0)|}, \quad (2.12)$$

onde  $\lambda$  representa a divergência na  $n$ -ésima iteração. Se obtemos  $\lambda < 0$ , a diferença entre  $x_{t_1}$  e  $x_{t_2}$  irá reduzir, ou seja, elas irão se aproximar. Porém, se  $\lambda > 0$  a diferença cresce exponencialmente.

Tomemos, como exemplo, a evolução temporal de uma variável,  $x(t)$ , de um determinado sistema não-linear, onde ela evolui com uma condição inicial e em outro momento com uma segunda condição inicial, diferente da primeira. Essa diferença é da ordem de  $10^{-5}$ , representada por  $\delta_1$ . Essa evolução está apresentada na Fig. (9a). Note que as trajetórias, inicialmente, evoluem juntas até um dado momento em que divergem uma da outra. Diminuimos a ordem de grandeza da diferença, entre as condições iniciais, para  $10^{-11}$ , representada por  $\delta_2$ , e apresentamos essa evolução na Fig. (9b). Observe que, neste caso, leva-se mais tempo para a divergência ocorrer. Isso nos mostra uma das principais características do comportamento dinâmico não-linear: sensibilidade às condições iniciais. Outro sim, embora haja essa divergência entre as trajetórias apresentadas, ela não tende para o infinito. Estando limitada pela região do atrator caótico no espaço de estado (STROGATZ, 1994).

Figura 9 – Evolução temporal da variável,  $x(t)$  (linha preta), de um sistema não-linear, com condições iniciais diferentes: (a)  $x(t) + \delta_1$  (linha vermelha) e (b)  $x(t) + \delta_2$  (linha azul).



Fonte: Autor

Na seção a seguir, vamos descrever brevemente o sistema de Lorenz como exemplo de sistema não-linear, que atende as condições abordadas acima para que sua dinâmica seja caótica. Como também calcularemos os pontos fixos e sua estabilidade.

## 2.3 SISTEMA DE LORENZ

O sistema foi desenvolvido pelo matemático e meteorologista Edward N. Lorenz (1917-2008), quando estudava um modelo simplificado das convecções atmosféricas (LORENZ, 1963). Lorenz foi quem demonstrou que os sistemas apresentavam soluções diferentes com condições iniciais ligeiramente diferentes e, conseqüentemente, divergiam uma da outra (MONTEIRO, 2011; JUNIOR, 2018). Esse comportamento já tinha sido suspeitado por Henri Poincaré, como apresentamos na seção (2.1).

O sistema de Lorenz é um sistema dissipativo e de tempo contínuo, que possui três variáveis de estado (STROGATZ, 1994). As equações diferenciais de primeira ordem que descrevem a dinâmica desse sistema são:

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (2.13a)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz \quad (2.13b)$$

$$\dot{z} = xy - bz, \quad (2.13c)$$

onde  $\sigma$ ,  $b$ ,  $r$  são os parâmetros do sistema e constantes positivas. Observe que as Eq. (2.13) não apresentam nenhum termo estocástico, mas dois termos não-lineares, sendo eles  $xz$  e  $xy$ . Esses termos são responsáveis por introduzir a não-linearidade. O sistema de Lorenz pode apresentar comportamentos dinâmicos diferentes de acordo com o ajuste dos parâmetros, por exemplo, como caos e periodicidade.

Para determinarmos os pontos fixos do sistema de Lorenz, precisamos analisá-lo a partir do ponto em que as Eq. (2.13) são iguais a zero, ou seja,  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . Deste modo, o sistema pode apresentar solução na qual o ponto fixo está localizado na origem,  $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ . Esse ponto existe para qualquer valor dos parâmetros. Além disso, o sistema de Lorenz apresenta uma importante simetria em suas equações, logo, se o parâmetro  $r > 1$ , podemos obter mais duas soluções com pontos fixos simétricos,  $(x^*, y^*, z^*) = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ .

A estabilidade dos pontos fixos são definidos aplicando a técnica de linearização, que apresentamos na subseção (2.1.1). Vamos linearizar entorno dos pontos fixos, assim podemos eliminar os termos não-lineares. Obtemos que

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (2.14a)$$

$$\dot{y} = rx - y \quad (2.14b)$$

$$\dot{z} = -bz. \quad (2.14c)$$

Consideramos os pontos fixos na origem,  $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ . Resolvendo as Eq. (2.14) e escrevendo na forma matricial, temos que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

note que  $\dot{z}$  não está presente nas equações acima, isso porque ela está desacoplada e  $z(t) \rightarrow 0$  exponencialmente. O traço dessa matriz é dada por  $\tau = -\sigma - 1$  e o seu determinante  $\Delta = \sigma(1 - r)$ . Caso  $r > 1$ , a origem torna-se um ponto fixo sela e  $\Delta < 0$ , ou seja, duas direções estáveis e uma instável. Porém, se  $r < 1$ , a origem será um ponto fixo estável e os outros dois pontos fixos simétricos serão instáveis.

Resolvemos acima o sistema de Lorenz para os pontos fixos na origem. Agora, vamos calcular os autovalores da matriz Jacobiana utilizando os outros pontos fixos,  $(x^*, y^*, z^*) = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z^* & -1 & -x^* \\ y^* & x^* & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Substituindo os pontos fixos na matriz, vamos resolver o determinante,

$$\det \begin{bmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & 0 \\ r - 1 & -1 - \lambda & -(\pm\sqrt{b(r-1)}) \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

obtemos o polinômio  $\lambda^3 + \lambda^2(\sigma + b + 1) + \lambda b(\sigma + r) + 2\sigma b(r - 1) = 0$ . Os pontos fixos  $(x^*, y^*, z^*) = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$  serão estáveis. No entanto, essa estabilidade é altera quando ocorre uma bifurcação do tipo Hopf, onde o sistema passa a apresentar autovalores imaginários, (STROGATZ, 1994; MONTEIRO, 2011). Se considerarmos que  $\lambda = iw$  e substituirmos no polinômio dos autovalores, teremos que

$$\begin{aligned} (iw)^3 + (iw)^2(\sigma + b + 1) + (iw)b(\sigma + r) + 2\sigma b(r - 1) &= 0 & (2.15) \\ -iw^3 - w^2(\sigma + b + 1) + (iw)b(\sigma + r) + 2\sigma b(r - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Ao separarmos a parte real da imaginária da Eq. (2.15), obtemos

$$w^2(\sigma + b + 1) = 2\sigma b(r - 1) \quad (2.16a)$$

$$w^3 = wb(\sigma + r). \quad (2.16b)$$

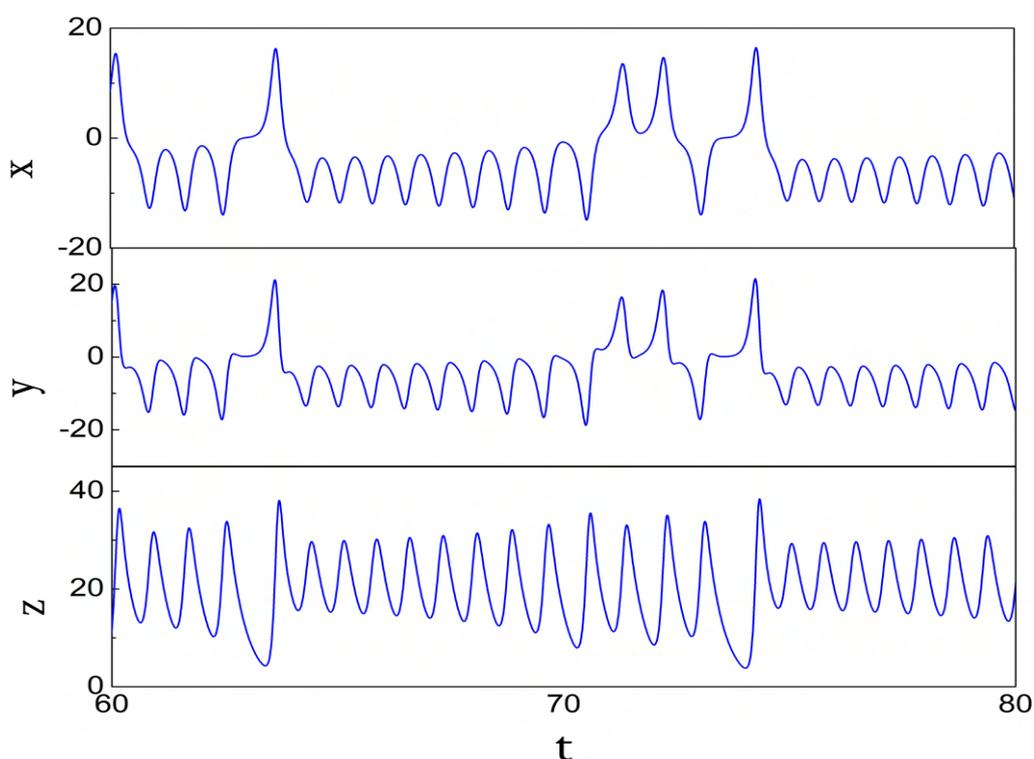
Da Eq. (2.16b), temos duas possíveis soluções,  $w = 0$  ou  $w^2 = b(\sigma + r)$ . Usando a segunda solução e aplicando na Eq. (2.16a), resolvemos para  $r$ ,

$$r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}, \quad (2.17)$$

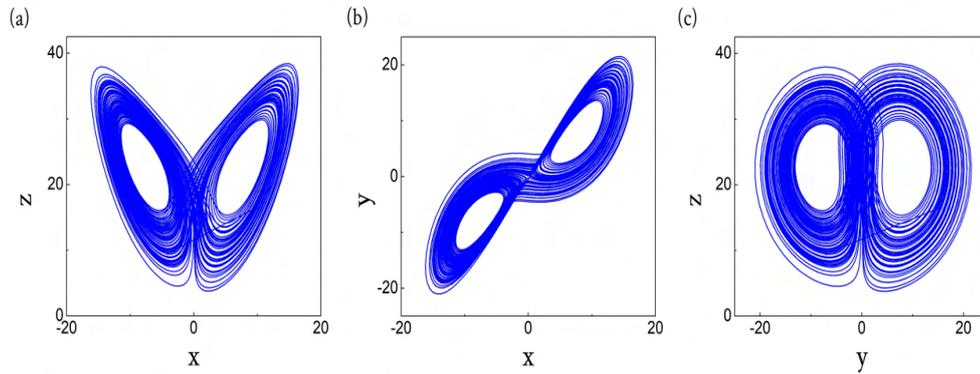
onde o subscrito  $H$  faz referência a bifurcação Hopf. Assumindo que  $\sigma - b - 1 > 0$ , então, podemos definir  $r$  como parâmetro positivo. Se  $\sigma$  e  $b$  são positivos,  $r$  assumirá valores entre 1 e  $r_H$  garantindo a estabilidade (STROGATZ, 1994). Quando  $r = r_H$ , os autovalores serão imaginários, conseqüentemente, ocorrerá uma bifurcação do tipo Hopf. Porém, se  $r > r_H$  o sistema de Lorenz pode apresentar comportamento caótico ou periódico.

Utilizando o método de integração numérica Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> ordem, nós solucionamos as Eq. (2.13) com os parâmetros ajustados para  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 25$  ( $> r_H \approx 24.7368$ ) e condições iniciais aleatórias. A Fig. (10) nos mostra as séries temporais das variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, evoluindo irregularmente. A Fig. (11) nos mostra os retratos de fase com par de variáveis do sistema,  $z \times x$ ,  $y \times x$  e  $z \times y$ . Esses resultados demonstram que o sistema de Lorenz satisfaz as condições, apresentadas na seção (2.2), para que um sistema apresente caos em sua dinâmica.

Figura 10 – Série temporal das variáveis do sistema de Lorenz.

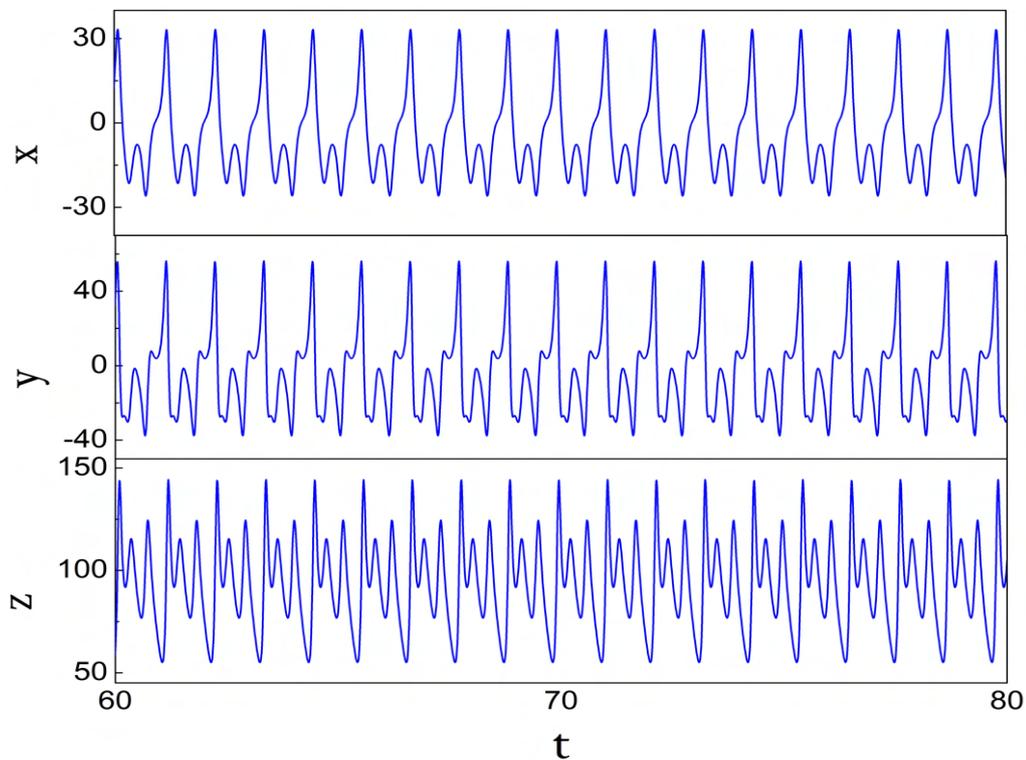


Fonte: Autor

Figura 11 – Retrato de fase das variáveis: (a)  $z \times x$ , (b)  $y \times x$  e (c)  $z \times y$ .

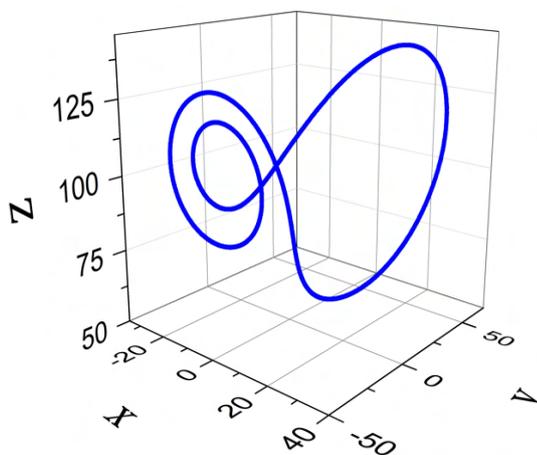
Fonte: Autor

Nós variamos o valor do parâmetro  $r$  para  $r = 100.75$  e mantivemos  $b = 8.00/3.00$  e  $\sigma = 10.00$ . Cálculamos novamente as Eq. (2.13) e encontramos uma solução periódica. A séries temporais apresentadas na Fig. (12), nos mostra as variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  evoluindo periodicamente. O espaço de estado, apresentado na Fig. (13), possui um atrator periódico. Portanto, o regime de evolução do sistema depende do ajuste do parâmetro  $r$ .

Figura 12 – Série temporal das variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  do sistema de Lorenz, com  $\sigma = 10.00$ ,  $b = 8.00/3.00$  e  $r = 100.75$ .

Fonte: Autor

Figura 13 – Espaço de estado do sistema de Lorenz em regime periódico, com  $r = 100.75$ .



Fonte: Autor

No próximo capítulo iremos abordar a respeito do fenômeno da sincronização entre osciladores caóticos acoplados e alguns tipos de sincronização que podemos observar a partir desses acoplamentos, seja com osciladores de um mesmo sistema ou de sistemas diferentes.

### 3 SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS

A observação e descrição de fenômenos da sincronização tem registro histórico desde século XVII, com os estudos do físico Christiaan Huygens. Provavelmente um dos primeiros a notar o fenômeno, ele observou que dois relógios de pêndulo, suspensos pelo mesmo suporte, tendiam a sincronizar movendo-se em direções opostas, devido a uma pequena interferência causada pelo acoplamento discreto via suporte (PIKOVSKY; ROSENBLUM; KURTHS, 2002; RAMACHANDRAN, 2013). Esse fenômeno se tornou objeto de curiosidade e de investigação para a comunidade científica. A partir daí a sincronização passou, também, a ser observada em outros sistemas, como, por exemplo, entre vagalumes (STROGATZ, 1994) e em outros sistemas biológicos, como o cardíaco e locomotor (KIRBY et al., 1989).

Apesar desses estudos sobre o fenômeno da sincronização em sistemas lineares, era contraintuitivo a possibilidade de que dois sistemas não-lineares, que têm sensibilidade às condições iniciais (e cuja evolução temporal diverge exponencialmente, conforme vimos no Capítulo 2), sincronizassem. No entanto, no trabalho desenvolvido, na década de 1980, por Fujisaka e Yamada (FUJISAKA; YAMADA, 1983), eles demonstraram, teoricamente, a condição para que o fenômeno da sincronização pudesse ocorrer em sistemas com dinâmica caótica. Esse resultado induziu novos estudos na busca desse fenômeno e, na década de 1990, Pecora e Carroll (PECORA; CARROLL, 1990; PECORA; CARROLL, 1991), observaram nos sistemas de Lorenz e Rössler, a sincronização entre dois osciladores caóticos idênticos, em configuração do tipo mestre-escravo, ou seja, com acoplamento unidirecional. Esses resultados desencadearam, nos anos seguintes, um crescimento exponencial de pesquisas na área, que foram estendidas, para além da Física, para sistemas ecológicos, fisiológicos, meteorológicos, etc. (PIKOVSKY; ROSENBLUM; KURTHS, 2002; BAYLY et al., 1993).

A motivação para estudar sincronização de caos, do ponto de vista aplicado ou fundamental, nas suas diversas formas de sincronização e em diferentes condições, é, por exemplo, aplicações em comunicação, como, inicialmente, proposto por Cuomo e Oppenheim (CUOMO; OPPENHEIM, 1993), que demonstram a possibilidade de transmissão de mensagens “escondidas” no atrator caótico. Outras propostas de aplicação seguiram em estudos ópticos (ROY; THORNBURG, 1994); em sistemas cardíacos (BELYKH; LANGE; HASLER, 2005), eventos extremos (CAVALCANTE et al., 2013); e redes neurais (BELYKH; LANGE; HASLER, 2005).

Entendemos por sincronismo de caos o fenômeno pelo qual dois ou mais sistemas caóticos, idênticos ou não, acoplados por uma ou várias variáveis dos sistemas, leva-os a convergirem para um comportamento comum. Seja quando um dos sistemas

é guiado pela dinâmica do outro, com acoplamento unidirecional, onde a informação fornecida ao oscilador guiado ocorre direto ou indiretamente. Seja quando existe influência mútua, devido a um acoplamento bidirecional, onde ambos os osciladores não evoluem livremente, mas são forçados e entram em estado de equilíbrio. A qualidade da sincronização está relacionada com o nível de acoplamento entre os osciladores (PIKOVSKY; ROSENBLUM; KURTHS, 2002; BOCCALETTI et al., 2002).

Existe uma grande diversidade nas formas de sincronismo. Neste capítulo, iremos conhecer algumas delas, das quais podemos destacar: 1) **Sincronização Completa**, fase e amplitude sobrepostas; 2) **Sincronização com Atraso**, mesma amplitude, mas um sistema estará atrasado no tempo em relação ao outro; 3) **Sincronização Antecipada**, também com a mesma amplitude, mas a fase de um estará adiantada no tempo em relação ao outro; 4) **Sincronização de Fase**, as fases sincronizam com amplitudes diferentes; e 5) **Sincronização Generalizada**, geralmente, é observada em osciladores não idênticos acoplados, que possuam uma relação funcional entre os estados de cada um (BOCCALETTI et al., 2002). Dessa identificação de fenômenos de sincronização foi possível devido aos diversos estudos, teóricos e experimentais, em sistemas reais e modelados, como lasers (ROY; THORNBURG, 1994), circuitos eletrônicos não-lineares (LORENZ, 1963; RÖSSLER, 1976; KENNEDY, 1993) etc. A seguir, iremos usar dois osciladores caóticos acoplados para ilustrar cada uma das cinco formas de sincronização citadas, para os quais usamos duas configurações de acoplamento, unidirecional e bidirecional.

Para todos os casos aqui tratados, foram realizadas simulações numéricas com o mesmo método de resolução, qual seja, Runge-Kutta de 4ª ordem.

### 3.1 SINCRONIZAÇÃO COMPLETA

Sincronização Completa ocorre quando dois ou mais sistemas não-lineares idênticos, conectados por intermédio de um acoplamento unidirecional ou bidirecional, apresentam soluções cujas as trajetórias de ambos tornam-se idênticas e permanecem iguais no decorrer do tempo. Essa sincronização pode ser observada nas diferentes variáveis de estado. Cada par de coordenadas dos dois osciladores quando observadas em um plano cartesiano (onde cada eixo é composto por uma variável de cada oscilador) apresentam uma curva característica, uma reta na diagonal. Também pode ser observada na sobreposição das curvas dessas variáveis ao longo do tempo (séries temporais). Para demonstrar esse comportamento, considere dois osciladores descritos pelas equações abaixo:

$$\dot{\vec{R}}_1 = \mathbf{R}_1 = F(\vec{R}_1) \quad (3.1a)$$

$$\dot{\vec{R}}_2 = \mathbf{R}_2 = F(\vec{R}_2, S) \quad (3.1b)$$

onde  $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  e  $(y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  são as matrizes transpostas de  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$ , respectivamente. Definimos  $\mathbf{F}$  como campo vetorial que descreve o fluxo do sistema e  $\mathbf{S}$  é a função adicionada na Eq. (3.1b), que corresponde ao sinal proveniente do oscilador  $\mathbf{R}_1$ . As Eqs. (3.1) configura o acoplamento unidirecional, que chamaremos aqui de diretor-receptor.

Vamos analisar aqui, como exemplo, o sistema de Rössler. As equações diferenciais de primeira ordem que governam a dinâmica desse sistema são:

Oscilador diretor  $\mathbf{R}_1$ :

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \quad (3.2a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + ax_3 \quad (3.2b)$$

$$\dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c), \quad (3.2c)$$

Oscilador receptor  $\mathbf{R}_2$ :

$$\dot{y}_1 = -y_2 - y_3 + c_1(x_1 - y_1) \quad (3.3a)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + ay_3 \quad (3.3b)$$

$$\dot{y}_3 = b + y_3(y_1 - c), \quad (3.3c)$$

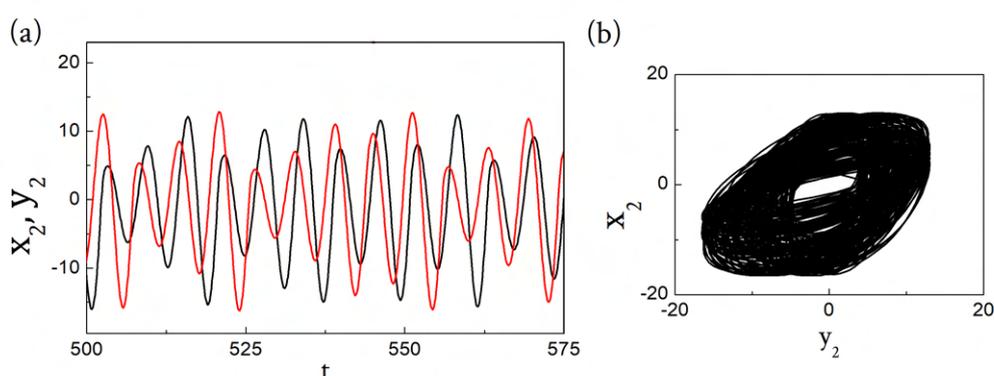
onde  $a, b$  e  $c$  são os parâmetros comuns aos osciladores, para os quais os seguintes valores (0.15, 0.20, 10.00) são usados para  $(a, b, c)$ , respectivamente. Na Eq. (3.3a),  $c_1$  é o parâmetro do nível de acoplamento e para valores  $0.0 \leq c_1 < 0.2$  não ocorre sincronização. Isso significa que o nível de acoplamento não é suficiente para que ocorra uma sincronização entre os osciladores diretor e receptor. Porém, se  $c_1$  assume valores a partir de 0.2, obtemos uma sincronização. Esses valores foram calculados numericamente, com 0.2 sendo o valor mínimo necessário para que os osciladores sigam a mesma trajetória. Dessa forma, estamos realizando um acoplamento aditivo unidirecional, isso significa que, ao invés de substituímos a variável de um oscilador por outra do segundo oscilador, estamos adicionando uma função que consiste numa diferença entre as variáveis, das Eq. (3.2a) e Eq. (3.3a).

Resolvemos numericamente as Eq. (3.2) e Eq. (3.3) sem e com acoplamento, particularmente, com  $c_1 = 0$  e  $c_1 = 1.0$ . Importante frisar que o sistema foi simulado com condições iniciais diferentes. Como os parâmetros são iguais para ambos os osciladores, se o estado inicial também fosse igual iríamos obter o mesmo resultado. Logo, mesmo sem acoplar, os osciladores estariam com soluções exatamente iguais. Porém, em sistemas reais isso não acontece devido a ruídos e/ou ligeira diferença nos parâmetros.

Apresentamos os resultados das simulações: a série temporal, das variáveis  $x_2$  e  $y_2$ , apresentada na Fig. (14a) nos mostra o caso em que os osciladores estão evoluindo independentemente um do outro. Em outras palavras, estão desacoplados. Outra

informação importante que este resultado confirma é o comportamento da solução mediante a diferença nas condições iniciais (abordamos a respeito dessa questão no Capítulo 2). Se em nossas simulações essas condições fossem iguais, iríamos observar uma sincronização das trajetórias nas Fig. (14). Ao olharmos para o gráfico das variáveis equivalentes,  $x_2$  e  $y_2$ , ou seja, retrato de fase apresentado na Fig. (14b), notaremos o comportamento dinâmico onde não há sincronização.

Figura 14 – Sistema de Rössler: dois osciladores desacoplados e evoluindo livremente, com  $c_1 = 0$ . (a) Série temporal do oscilador diretor, linha preta, e receptor, linha vermelha; (b) Retrato de fase das variáveis  $y_2 \times x_2$ .



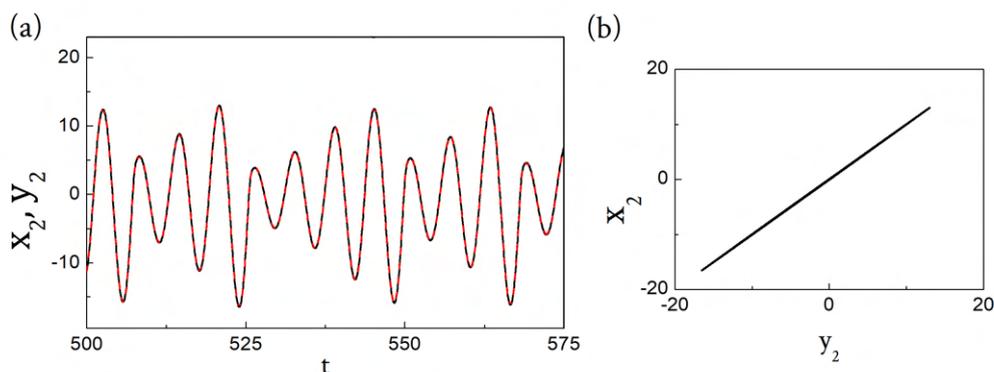
Fonte: Autor

Em contrapartida aos resultados com  $c_1 = 0$ , quando  $c_1$  assume valor igual a 1.0, o oscilador receptor ( $\mathbf{R}_2$ ) recebe a informação na Eq. (3.3a) do oscilador diretor ( $\mathbf{R}_1$ ). Apresentamos, então, as trajetórias das variáveis  $x_2$  e  $y_2$ , na série temporal da Fig. (15a), perfeitamente sobrepostas, ou seja, estão sincronizadas em fase e amplitude. O oscilador receptor está sendo guiado pelo diretor. Na Fig. (15b) observamos o retrato de fase,  $x_2 \times y_2$ , o qual nota-se a formação de uma reta na diagonal. Esse comportamento é característico da Sincronização Completa.

Note a riqueza desse resultado dinâmico, o oscilador  $\mathbf{R}_2$ , que possui a sua própria trajetória seguindo um caminho completamente diferente do outro oscilador,  $\mathbf{R}_1$ , conforme vimos na Fig. (14), passa, ao receber a informação de  $\mathbf{R}_1$  por intermédio de  $x_1$ , a seguir esse oscilador e retorna a ficar independente quando o acoplamento é zerado.

Esse tipo de sincronização completa pode ser reproduzido com outros sistemas e também com outras configurações de acoplamento. Por exemplo, ao invés de realizar o acoplamento aditivo unidirecional, pode-se usar acoplamento por substituição, onde uma variável escolhida do oscilador  $\mathbf{R}_2$  é substituída pela variável equivalente de  $\mathbf{R}_1$ . Nesse caso, teríamos um acoplamento por substituição ou direto. Em configuração de acoplamento aditivo bidirecional, em que, o mesmo termo aditivo que aparece na Eq.

Figura 15 – Sincronização completa entre dois osciladores de Rössler com  $c_1 = 1.0$ : (a) Série temporal do oscilador diretor, linha preta, e receptor, linha vermelha; (b) Retrato de fase das variáveis  $x_2 \times y_2$ . A reta na diagonal ratifica a sincronização observada em (a).



Fonte: Autor

(3.3a), também apareceria em (3.2a), mas com diferença na posição das variáveis, ou seja,  $c_1(y_1 - x_1)$ .

### 3.2 SINCRONIZAÇÃO DE FASE

A Sincronização de Fase em sistemas caóticos foi observada por Rosenblum *et al* (ROSENBLUM; PIKOVSKY; KURTHS, 1996). Sua definição é baseada no conceito de sincronização de fase em osciladores periódicos, que consiste no travamento de fases dos osciladores acoplados. Matematicamente definido pelo módulo da diferença entre as fases de dois osciladores,  $|n\phi_1 - m\phi_2| = \text{constante}$ , onde  $n$  e  $m$  são números inteiros e  $\phi_1$  e  $\phi_2$  as fases dos osciladores 1 e 2. Posteriormente, a sincronização de fase foi demonstrado experimentalmente por Parlitz *et al* (PARLITZ *et al.*, 1996). Assim, para obtermos esse tipo de sincronismo com osciladores caóticos, necessário que a diferença entre as fases dos osciladores sejam limitadas por uma constante, ou seja,  $|n\phi_1 - m\phi_2| < \text{constante}$ . Outra característica importante, dessa forma de sincronismo, é que as amplitudes não são iguais.

O problema da sincronização de fase está em calcular a fase de um atrator caótico. No caso de osciladores periódicos as fases são facilmente calculadas. No caso dos osciladores caóticos, eles não possuem uma definição precisa para a sua fase (PIKOVSKY *et al.*, 2003). No entanto, em osciladores caóticos do tipo de Rössler, que espiralam entorno de um ponto fixo, fica relativamente mais fácil de definir uma fase. De acordo com Rosenblum *et al* (ROSENBLUM; PIKOVSKY; KURTHS, 1997),

podemos calcular a fase e a amplitude do atrator de Rössler através das relações:

$$\phi = \arctan(y/x) \text{ e } A = (x^2 + y^2)^{1/2} \quad (3.4)$$

Nos casos mais complexos, existem alguns métodos que permitem calcular a fase de um atrator caótico. Por exemplo, pode se construir um mapa de Poincaré e em seguida definir uma fase para cada parte da trajetória entre duas seções transversais com a superfície, como uma função linear do tempo. Dessa forma, a fase ganha  $2\pi$  a cada retorno à superfície da seção (PIKOVSKY et al., 2003):

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t < t_{n+1}, \quad (3.5)$$

onde  $t_n$  é o tempo do  $n$ -ésimo cruzamento da superfície secante. Note, no entanto, que essa definição é ambígua e ela depende da escolha da superfície de Poincaré. Consequentemente, reflete na definição da fase.

Para demonstrar a Sincronização de Fase, construímos um acoplamento aditivo bidirecional entre dois osciladores não-lineares de Rössler. Iremos adicionar, na equação de ambos os osciladores, uma função dada pela diferença entre as variáveis equivalentes, multiplicada por um parâmetro de acoplamento. Esse tipo de configuração de acoplamento permite que haja uma influência mútua entre os osciladores, diferentemente do caso unidirecional, onde apenas um oscilador é influenciado pela dinâmica do outro:

Oscilador  $\mathbf{R}_1$ :

$$\dot{x}_1 = -\omega_1 x_2 - x_3 + c_1(y_1 - x_1) \quad (3.6a)$$

$$\dot{x}_2 = \omega_1 x_1 + a x_3 \quad (3.6b)$$

$$\dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c), \quad (3.6c)$$

Oscilador  $\mathbf{R}_2$ :

$$\dot{y}_1 = -\omega_2 y_2 - y_3 + c_1(x_1 - y_1) \quad (3.7a)$$

$$\dot{y}_2 = \omega_2 y_1 + a y_3 \quad (3.7b)$$

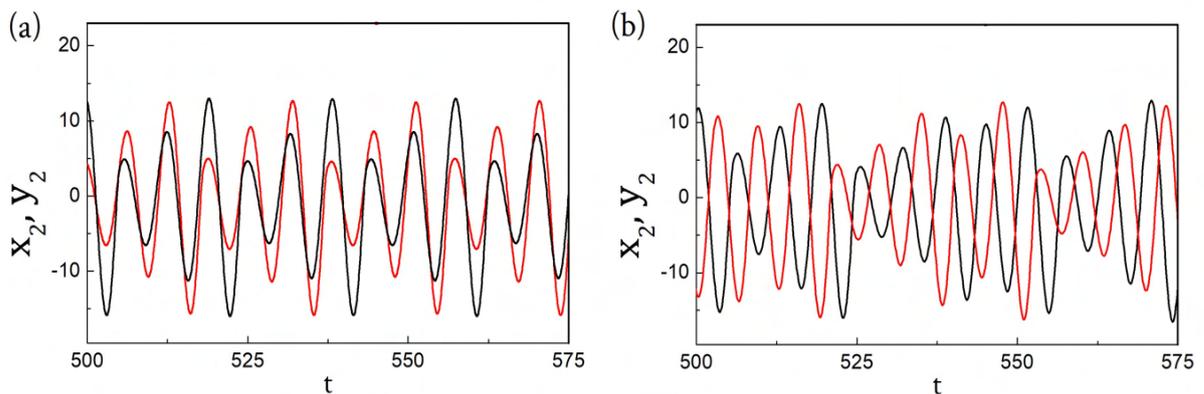
$$\dot{y}_3 = b + y_3(y_1 - c), \quad (3.7c)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os parâmetros do sistema e assumem os mesmos valores da seção anterior (3.1), ou seja, (0.15, 0.20, 10.00). O parâmetro de acoplamento,  $c_1$ , com valor igual a 0.04;  $\omega_1 = 0.95$  e  $\omega_2 = 0.96$  são as frequências internas de cada oscilador.

Simulando numericamente as Eq. (3.6) e Eq. (3.7) obtivemos o resultado da sincronização de fase. Como podemos observar na série temporal da Fig. (16a), as fases dos osciladores  $\mathbf{R}_1$  (linha preta) e  $\mathbf{R}_2$  (linha vermelha), das variáveis  $x_2$  e  $y_2$

estão sincronizadas em fase, mas não em amplitude. Logo,  $|n\phi_1 - m\phi_2| < constante$ . Se além da amplitude, a fase também estiver dessincronizada, conseqüentemente, os osciladores não estarão sincronizados. Nesse caso,  $\phi_1 - \phi_2$  cresce com o tempo. Podemos observar esse comportamento quando o nível de acoplamento,  $c_1$ , tende a zero, conforme está apresentado na Fig. (16b), onde  $c_1$  assume um valor igual a 0.001.

Figura 16 – Sincronização de Fase entre dois osciladores de Rössler: Série temporal dos osciladores  $\mathbf{R}_1$ , linha preta, e  $\mathbf{R}_2$ , linha vermelha, com (a)  $c_1 = 0.04$ , sincronizados; e (b)  $c_1 = 0.001$ , dessincronizados.



Fonte: Autor

### 3.3 SINCRONIZAÇÃO COM ATRASO

Sincronização com Atraso ocorre quando existe uma diferença temporal de um oscilador em relação ao outro. Por exemplo,  $B_1(t + \tau) = A_1(t)$ , onde  $\tau$  representa o atraso temporal na resposta do oscilador  $\mathbf{B}$ . Esse tipo de sincronismo foi conceituado por Rosenblum *et al* (ROSENBLUM; PIKOVSKY; KURTHS, 1997), quando demonstraram que com o aumento do nível de acoplamento entre dois osciladores caóticos acoplados e sincronizados em fase, ocorre uma transição para um novo estado de sincronismo em que os osciladores passam a ter uma relação entre suas amplitudes. No entanto, um deles estará atrasado no tempo em relação ao outro. Então, esse novo estado de sincronismo foi nomeado de Sincronização com Atraso. Para caracterizar esse sincronismo, defini-se uma função chamada de Função de Similaridade, que determina uma diferença média do tempo entre as variáveis dos dois osciladores acoplados. A Função Similaridade é expressa como:

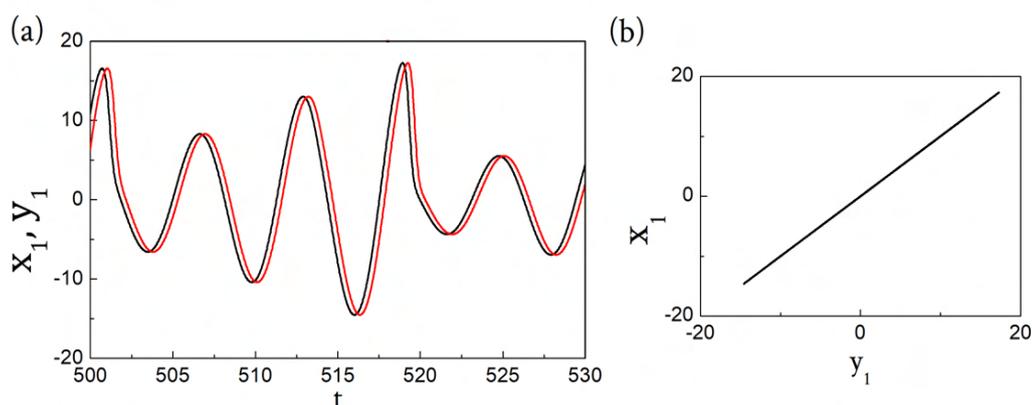
$$S^2 = \frac{\langle [x_2(t + \tau) - x_1(t)]^2 \rangle}{[\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle]^{1/2}}. \quad (3.8)$$

Essa Função de Similaridade calcula o valor mínimo considerável para que ocorra a sincronização com atraso. Se o valor mínimo de  $S(\tau)$  for zero, para  $\tau = 0$ ,

ou seja,  $y_1(t) = x_1(t)$  isso significa que os osciladores estão completamente sincronizados. Porém, se  $S(\tau)$  obtiver um valor mínimo para  $\tau \neq 0$ , então, observaremos um sincronismo com atraso entre os dois osciladores acoplados.

Para demonstrar a sincronização com atraso, consideramos o mesmo esquema das Eq. (3.6) e Eq. (3.7) da seção anterior (3.2) e os mesmos valores dos parâmetros, exceto  $c_1$ , que assumirá o valor igual a 0.17 e o atraso temporal,  $\tau$ , igual a 0.24, ou seja,  $y_1(t + 0.24)$ . Apresentamos as soluções das simulações numéricas nas Fig. (17). Note que, na série temporal, as trajetórias de  $x_1$  (linha preta) e  $y_1$  (linha vermelha) dos osciladores convergem para um estado comum, porém com  $\mathbf{R}_2$  atrasado no tempo em relação a  $\mathbf{R}_1$ , Fig. (17a). Como os osciladores possuem a mesma amplitude, o retrato de fase das variáveis  $y_1 \times x_1$  apresenta uma reta na diagonal, Fig. (17b).

Figura 17 – Sincronização com Atraso entre dois osciladores de Rössler, com  $c_1 = 0.17$  e  $\tau = 0.24$ : (a) Série temporal das variáveis  $x_1$ , linha preta, e  $y_1$ , linha vermelha; (b) Retrato de fase das variáveis  $x_1 \times y_1$ .



Fonte: Autor

### 3.4 SINCRONIZAÇÃO ANTECIPADA

Esse tipo de sincronização, bastante contraintuitiva, foi relatada primeiramente por Voss (VOSS, 2000), usando a configuração de acoplamento aditivo unidirecional com dois osciladores não-lineares de Rössler. Voss fez uma pequena mudança no termo linear utilizado para adicionar a informação do oscilador diretor no oscilador receptor. Lembrando que esse termo linear consiste na diferença entre a variável de cada oscilador, porém, para este caso, a variável do receptor, no termo, possui um atraso temporal, ou seja,  $c_1(x_1 - y_{1\tau})$ . Dessa forma, possibilita que o receptor antecipe a influência da dinâmica do oscilador diretor sobre ele.

Vamos demonstrar o sincronismo antecipado utilizando a mesma configuração de acoplamento usado por Voss (VOSS, 2000), ou seja, aditiva unidirecional. Tomamos

dois osciladores do sistema de Rössler e as equações que descrevam o acoplamento em análise:

Oscilador diretor  $\mathbf{R}_1$ :

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \quad (3.9a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + ax_3 \quad (3.9b)$$

$$\dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c) \quad (3.9c)$$

Oscilador receptor  $\mathbf{R}_2$ :

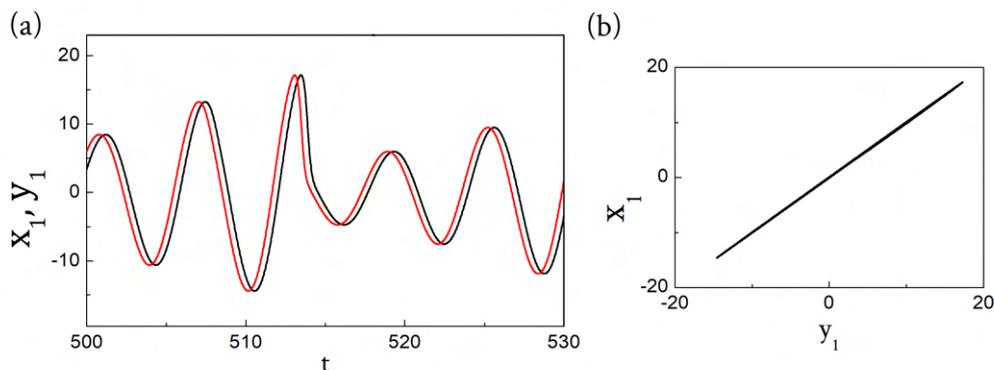
$$\dot{y}_1 = -y_2 - y_3 + c_1(x_1 - y_{1\tau}) \quad (3.10a)$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + ay_3 \quad (3.10b)$$

$$\dot{y}_3 = b + y_3(y_1 - c), \quad (3.10c)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os parâmetros dos osciladores e os seus valores são os mesmos que usamos na seção (3.2). Seja  $y_{1\tau} = y_1(t - \tau)$ ,  $\tau > 0$ , que descreva a diferença no tempo entre os osciladores diretor ( $\mathbf{R}_1$ ) e receptor ( $\mathbf{R}_2$ ),  $\tau$  assume um valor igual a 0.4 e  $c_1 = 1.0$ . Então, calculamos numericamente as Eq. (3.9) e Eq. (3.10). Os resultados estão na Fig. (18), onde vemos claramente, na série temporal de  $x_1$  (linha preta) e  $y_{1\tau}$  (linha vermelha), que o oscilador receptor antecipa o estado dinâmico do oscilador diretor. Isso significa que o  $\mathbf{R}_2$  em um determinado tempo é igual ao  $\mathbf{R}_1$  em um tempo futuro, ou seja  $y_1(t) = x_1(t - \tau)$ . O retrato de fase das variáveis  $y_{1\tau} \times x_1$  apresentado na Fig. (18b) ratifica a sincronização com a reta na diagonal.

Figura 18 – Sincronização Antecipada com dois osciladores de Rössler, com  $c_1 = 1.0$  e  $\tau = 0.4$ : (a) Série temporal das variáveis  $x_1$ , linha preta, e  $y_1$ , linha vermelha; (b) Retrato de fase das variáveis  $y_1 \times x_1$ , confirmando a convergência dos osciladores diretor e receptor.



Fonte: Autor

Uma possível aplicação para esse tipo de sincronismo, como sugeridas por Voss (VOSS, 2000), seria em sistemas neurais. Em 2003, Cizak *et al* (CISZAK *et al.*, 2003)

simularam dois neurônios acoplados unidirecionalmente, do tipo FitzHugh-Nagumo, e observaram que um neurônio antecipou a dinâmica do outro.

### 3.5 SINCRONIZAÇÃO GENERALIZADA

Diferentemente da Sincronização Completa, que tem sido estudada como forma de sincronização típica de osciladores acoplados de um mesmo sistema, mas com dinâmicas distintas, a Sincronização Generalizada (SG) está mais associada ao acoplamento realizado entre osciladores de sistemas diferentes. Embora, conforme Gonzalez-Miranda ([GONZÁLEZ-MIRANDA, 2002](#)), essa diferença de sistemas não seja uma condição necessária para que seja observada a SG. De acordo com Rulkov *et al* ([RULKOV et al., 1995](#)), a SG ocorre quando existe uma relação funcional entre os estados de ambos os osciladores. Essa relação pode ser medida pelo método *mutual false nearest neighbors* ([AGRAWAL, 2012](#)). Ela permite que a trajetória do oscilador receptor possa ser definida a partir da trajetória do oscilador diretor. Se essa relação funcional for bastante rica, o gráfico das variáveis correspondentes dos osciladores pode não ser uma reta na diagonal, característica de uma sincronização completa, mas uma complexa figura geométrica ([RULKOV et al., 1995](#); [KOCAREV; PARLITZ, 1996](#)).

Para demonstrarmos esse tipo de sincronização, consideramos um acoplamento por substituição (ou acoplamento direto) entre dois osciladores caóticos de sistemas distintos, um de Lorenz e outro de Rössler. Tornaremos o oscilador Rössler como oscilador diretor e o oscilador Lorenz como o oscilador receptor. Por substituição, queremos dizer que as variáveis escolhidas do oscilador receptor serão substituídas pelas variáveis do oscilador diretor. Vamos escrever as equações de ambos os osciladores,

Oscilador diretor:

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \quad (3.11a)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + ax_3 \quad (3.11b)$$

$$\dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c) \quad (3.11c)$$

Oscilador receptor:

$$\dot{y}_1 = \sigma(y_2 - y_1) \quad (3.12a)$$

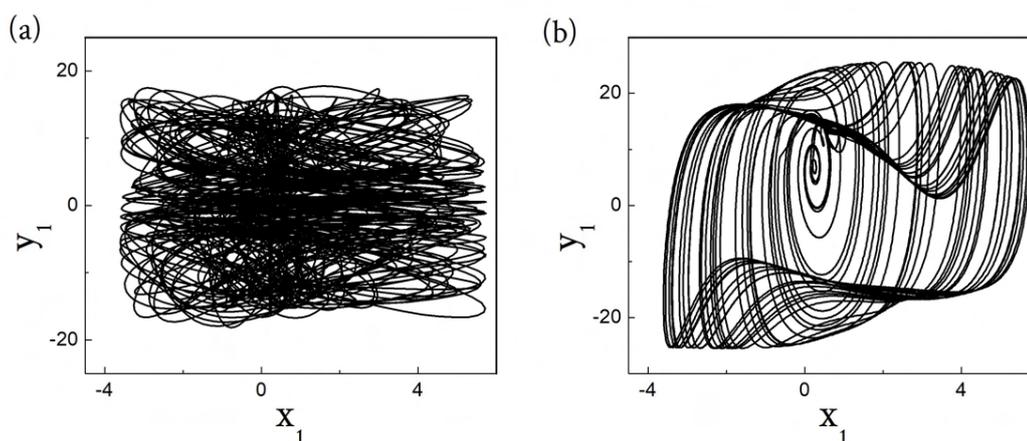
$$\dot{y}_2 = \rho\mu - \mu y_3 - y_2 \quad (3.12b)$$

$$\dot{y}_3 = \mu y_2 - \beta y_3, \quad (3.12c)$$

onde  $(a, b, c)$  e  $(\sigma, \rho, \beta)$  são os parâmetros dos osciladores diretor e receptor, respectivamente. Para o diretor, os parâmetros assumem os valores  $(0.45, 2.00, 4.00)$ , e para o receptor  $(10.00, 28.00, 2.66)$ . Seja  $\mu$  uma função escalar arbitrária, que pode ser igual a

$y_1$ , variável do oscilador receptor, ou igual a soma das variáveis do oscilador diretor. Nessa demonstração de Sincronização Generalizada, iremos considerar os dois casos de  $\mu$ . Com nossos cálculos numéricos das Eq. (3.11) e Eq. (3.12), obtivemos as soluções apresentados nas Fig. (19). Observe que na Fig. (19a) do retrato de fase das variáveis  $x_1 \times y_1$ , não consta qualquer comportamento que indique alguma correlação, mas pelo contrário, os osciladores diretor e receptor estão descorrelacionados. Esse resultado significa que  $\mu = y_1$ , ou seja, assume a variável oriunda do receptor, no entanto, não sincronizam. Porém, no caso onde  $\mu$  é igual a soma das variáveis do oscilador diretor, ou seja,  $\mu = x_1 + x_2 + x_3$ , obtemos uma solução das Eq. (3.11) e Eq. (3.12) em que o retrato de fase  $x_1 \times y_1$  apresenta uma complexa figura geométrica. De acordo com Rulkov *et al* (RULKOV *et al.*, 1995), essa complexa figura confirma a Sincronização Generalizada.

Figura 19 – Sincronização Generalizada entre um oscilador de Rössler e um de Lorenz, acoplados por substituição: Retrato de fase  $y_1 \times x_1$  (a) com  $\mu = y_1$ , os osciladores estão descorrelacionados; e (b)  $\mu = x_1 + x_2 + x_3$ , os osciladores estão relacionados, configurando Sincronização Generalizada.



Fonte: Autor

No próximo capítulo, iremos apresentar o sistema não-linear escolhido como plataforma de estudo para este trabalho. Vamos explorar a sua dinâmica e realizar acoplamentos entre dois osciladores dessa sistema.

## 4 SISTEMA GAUTHIER-BIENFANG

Eventos em sistemas complexos são de difícil modelização e previsibilidade. A necessidade de desenvolver modelos e realizar previsões no intuito, por exemplo, de identificar o nível de ocorrência e de magnitude desses eventos, motivou a buscar técnicas de análise e sistemas possíveis de (re)produzir em laboratório. O uso de sistemas caóticos eletrônicos (KENNEDY, 1993) e lasers (AGRAWAL, 2012), por exemplo, serve então como plataforma para o estudo de certos sistemas complexos naturais ou artificiais.

Sistemas com dinâmica caótica podem ser implementados a partir de sistemas eletrônicos. Por exemplo, os sistemas de Lorenz (LORENZ, 1963) e Rössler (RÖSSLER, 1976) têm sido usados em laboratórios de pesquisa, com um número bastante expressivos de resultados já publicados na literatura. Um dos sistemas eletrônicos não-lineares mais simples, porém, bem estudado é o Circuito de Chua, que foi apresentado em 1983, por Leo Ong Chua (CHUA, 1992; KENNEDY, 1993). A sua principal característica é a presença de três elementos armazenadores de energia e um resistor não-linear, ou resistor negativo, com três regiões lineares de operação de sua corrente. Nesse sistema, a linearidade por partes é responsável pelo comportamento caótico do circuito. Há outros sistemas eletrônicos não-lineares que também são muito citados na literatura, como, por exemplo, o oscilador de Van der pol (POL; MARK, 1927). De forma geral a montagem desses sistemas é de relativo baixo custo e apresentam uma variedade rica de comportamentos dinâmicos com bifurcação e caos.

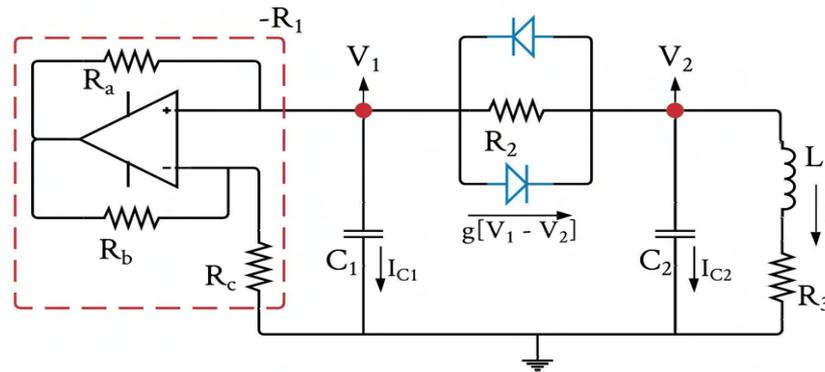
Destacamos aqui um sistema eletrônico não-linear, que optamos por trabalhar: o sistema Gauthier-Bienfang (G-B) (GAUTHIER; BIENFANG, 1996). Ele é um oscilador do tipo Chua modificado, de fácil implementação numérica e montagem experimental, já tendo sido usado por pesquisadores do grupo. A seguir, iremos descrevê-lo, caracterizando sua dinâmica e utilizando-o para acoplamento entre osciladores equivalentes. Inicialmente verificando resultados anteriores de Cavalcante *et al* (CAVALCANTE *et al.*, 2013), como forma de ‘certificar’ o bom funcionamento de nossas simulações e montagens experimentais. Após esses resultados preliminares, usamos esses sistemas eletrônicos não-lineares em novas experiências, originais, que são o principal objeto dessa Dissertação.

### 4.1 DESCRIÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DO SISTEMA G-B

O sistema eletrônico não-linear proposto por Gauthier-Bienfang (GAUTHIER; BIENFANG, 1996) está representado no esquema da Fig. (20). Com esse sistema foi possível definir critérios da sincronização de alta qualidade, discutindo as limitações

do uso do critério, então, estabelecido na literatura, onde os expoentes transversos de Lyapunov definiam a condição de sincronização. Foi mostrado que esse critério falha em certas circunstâncias quando são observados eventos de dessincronização, mesmo com o critério de expoentes transversos de Lyapunov sendo atendido. Esses autores propuseram um método para se observar a sincronização de alta qualidade.

Figura 20 – Diagrama esquemático do circuito Gauthier-Bienfang.



Fonte: Autor

No Sistema G-B, conforme o esquema da Fig. (20),  $V_1$  e  $V_2$  representam as tensões entre os terminais dos capacitores,  $I$  é a corrente que flui no indutor e a área selecionada contém o elemento com comportamento de Resistor negativo ( $-R_1$ ). O sistema consiste de dois capacitores,  $C_1$  e  $C_2$ , de 10nF; um indutor,  $L$ , de 56mH; um resistor,  $R_3$ , de  $100\Omega$  em série com o indutor; um dispositivo não-linear passivo, composto por dois diodos na configuração *back-to-back* e um resistor,  $R_2$ , de  $8,06k\Omega$ ; e um resistor negativo ( $-R_1$ ).

Nas próximas subseções, iremos deduzir as equações que governam a evolução temporal do sistema G-B (subseção (4.1.1)); descrever resistor negativo (subseção (4.1.2)); dispositivo não-linear (subseção (4.1.3)); analisar o comportamento dinâmico desse sistema (subseção (4.1.4)); e determinar os pontos fixos e sua estabilidade (subseção (4.1.5)).

#### 4.1.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA

Aplicando as leis de Kirchhoff (lei das malhas e dos nós) no sistema G-B, representado na Fig. (20), obtemos as seguintes equações diferenciais:

##### Lei dos Nós

$$I_1 - I_{c1} - g[V_1 - V_2] = 0 \quad (4.1a)$$

$$g[V_1 - V_2] - I - I_{c2} = 0, \quad (4.1b)$$

onde  $I_{c1}$  e  $I_{c2}$  são as correntes que fluem nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , respectivamente. Lembrando que os valores dos capacitores são iguais, aqui atribuímos uma identificação apenas para descrever as equações do sistema.

**Lei das malhas:** na malha que o indutor está presente, obtemos,

$$-V_2 + V_L + IR_3 = 0, \quad (4.2)$$

onde  $V_L$  é a tensão sobre o indutor. Podemos, então, reescrever as Eq. (4.1) e Eq. (4.2) da seguinte forma,

$$I_1 = I_{c1} + g[V_1 - V_2] \quad (4.3a)$$

$$g[V_1 - V_2] - I - I_{c2} = 0 \quad (4.3b)$$

$$V_L = V_2 - IR_3 \quad (4.3c)$$

Definimos as correntes que fluem nos capacitores e a tensão sobre o indutor nas suas formas derivativas,

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} \quad (4.4a)$$

$$I_{c1} = C \frac{dV_1}{dt} \quad (4.4b)$$

$$I_{c2} = C \frac{dV_2}{dt} \quad (4.4c)$$

$$V_L = \frac{dI}{dt}, \quad (4.4d)$$

onde  $C = C_1 = C_2$ . Utilizando as Eq. (4.4) podemos reescrever as Eq. (4.3) de forma a obter as derivadas das tensões e da corrente que flui no indutor:

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{I_1}{C} - \frac{g[V_1 - V_2]}{C} \quad (4.5a)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = g[V_1 - V_2] - I \quad (4.5b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V_1}{L} - \frac{IR_3}{L}. \quad (4.5c)$$

Para simplificação e para os cálculos numéricos, normalizamos as correntes, os resistores nas Eq. (4.5) e definimos uma escala temporal. Para isso, iremos utilizar os seguintes parâmetros:  $V_d = I_d R$  (tensão de limiar dos diodos),  $R = \sqrt{L/C}$  e  $\tau = \sqrt{LC}$ , respectivamente. Cujos valores são:  $V_d = 0.58V$ ,  $R \cong 2345\Omega$ ,  $I_d \approx 0.25mA$  e  $\tau = 23.6\mu s$ . Aplicando os parâmetros de normalização a cada variável correspondente, obtemos,

$$\begin{aligned}
V_{1j} &= \frac{V_1}{V_d}; & V_{2j} &= \frac{V_2}{V_d}; \\
I_{1j} &= \frac{I_1}{I_d}; & I_j &= \frac{I}{I_d}; & g'[V_{1j} - V_{2j}] &= \frac{g[V_1 - V_2]}{I_d}; \\
R'_1 &= \frac{R_1}{R}; & R'_2 &= \frac{R_2}{R}; & R'_3 &= \frac{R_3}{R} + R_{dc}; \\
\tau &= t/\sqrt{LC},
\end{aligned}$$

onde  $R_{dc} = 0.15$  é o valor normalizado da resistência dc característica do indutor. Assim, os resistores normalizados assumem os valores adimensionais,  $R'_1 = 1.3$  e  $R'_2 = 3.44$  e  $R'_3 = 0.193$ . Tomando a derivada em relação  $\tau$ , substituímos  $dt$  por  $d\tau\sqrt{LC}$  nas Eq. (4.5), como também os outros termos normalizados acima. Assim, chegamos nas equações diferenciais normalizadas,

$$\frac{dV_{1j}}{d\tau} = \dot{V}_{1j} = \frac{V_{1j}}{R'_1} - g'[V_{1j} - V_{2j}] \quad (4.6a)$$

$$\frac{dV_{2j}}{d\tau} = \dot{V}_{2j} = g[V_{1j} - V_{2j}] - I_j \quad (4.6b)$$

$$\frac{dI_j}{d\tau} = \dot{I}_j = V_{2j} - I_j R'_3, \quad (4.6c)$$

onde  $g'[V] = \frac{V}{R'_2} + I_r(\exp^{\alpha V} - \exp^{-\alpha V})$  é o termo de ganho, responsável pela não-linearidade do sistema, com  $V = V_{1j} - V_{2j}$ . Voltaremos para esta equação na próxima subseção. Portanto, a evolução da dinâmica do sistema G-B está descrito pelas Eq. (4.6) adimensionais e os resultados numéricos, que serão apresentados adiante, foram obtidos usando os parâmetros com os valores adimensionais, acima descritos.

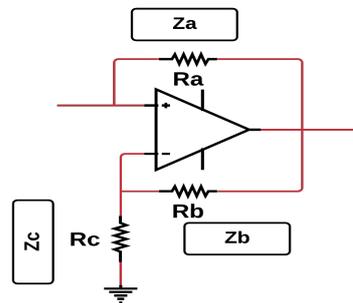
#### 4.1.2 RESISTOR NEGATIVO

Em contraste com o resistor positivo usual, que dissipa energia consumindo a corrente, o resistor negativo amplifica o sinal que por ele passa. Resistores negativos dividem-se em dois tipos: 1) tipo S, significa que enquanto a corrente aumenta, a tensão diminui e o gráfico I-V (corrente-tensão) tem uma aparência de S; e 2) tipo N, o inverso do tipo S, ou seja, enquanto a tensão aumenta, a corrente diminui e o gráfico I-V tem uma aparência de N (HOROWITZ; HILL, 2015; UHLE, 1988; GABILISCO, 2001).

O resistor negativo consiste basicamente de um sistema eletrônico chamado de Conversor de Impedância Negativa (CIN) (HOROWITZ; HILL, 2015). O CIN possibilita que a impedância ( $\mathbf{Z}$ ) de entrada seja negativa, além de diminuir a interferência de capacitâncias parasitas. O esquema do CIN está apresentado na Fig. (21).

Iremos demonstrar como a impedância de entrada tem sua polaridade invertida. O CIN consiste de um amplificador operacional (op-amp) e três resistores. Cada

Figura 21 – Conversor de impedância negativa, onde  $Z_a$ ,  $Z_b$  e  $Z_c$  são as impedâncias de cada resistor, respectivamente.



Fonte: Autor

um desses resistores, possui uma impedância que descrevemos como  $Z_a$ ,  $Z_b$  e  $Z_c$ , respectivamente. Nos terminais positivo e negativo do amplificador operacional op07 as tensões são:  $V_+$ , para entrada não inversora; e  $V_-$ , para entrada inversora. As correntes que fluem nas impedâncias são  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$ . Por fim, nomeamos uma impedância de entrada  $Z_{in}$  (*input*) e a saída do op-amp, como  $V_{out}$  (*output*). Percorrendo a malha do sistema, podemos definir as correntes,

$$I_a = \frac{V_+ - V_{out}}{Z_a} \quad (4.7a)$$

$$I_b = \frac{V_{out} - V_-}{Z_b} \quad (4.7b)$$

$$I_c = \frac{V_-}{Z_c}, \quad (4.7c)$$

onde as correntes  $I_a = I_{in}$  e  $I_2 = I_3$ . As tensões de entrada e do op-amp são iguais, ou seja,  $V_{in} = V_+ = V_-$ <sup>1</sup>. Utilizando esses novos termos na Eq. (4.7), podemos reescrever a impedância de entrada,  $Z_{in} = V_{in}/I_{in}$ , de modo a obtermos que

$$Z_{in} = -\frac{Z_a Z_c}{Z_b} \quad (4.8)$$

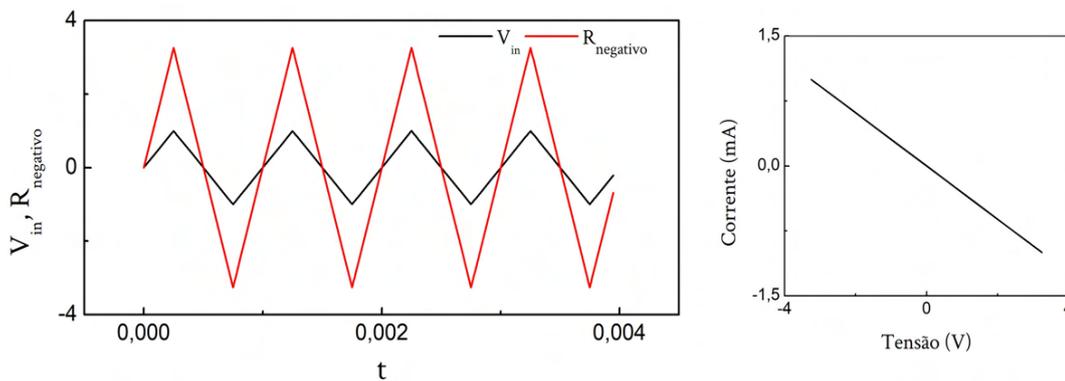
Agora que obtivemos a equação final, Eq. (4.8), vamos calcular o valor da resistência negativa do CIN. Considerando os valores dos os resistores da Fig. (4.2), com as seguintes impedâncias:  $R_a = 2.2k\Omega$ ;  $R_b = 1.2k\Omega$ ; e  $R_c = 1.5k\Omega$ . Substituindo esses valores na Eq. (4.8), obtemos o resultado,

$$R_{negativo} = -2,75 k\Omega \quad (4.9)$$

<sup>1</sup> uma vez que não deve haver diferença de potencial (ddp) entre as tensões de um op-amp. O contrário compromete o funcionamento do componente. Na prática, é importante medir as tensões nesses terminais, às vezes o sistema pode não estar funcionando devido a uma pequena ddp nos terminais do amplificador operacional.

Na Fig. (22) apresentamos o comportamento do sinal de entrada e do resistor negativo. Os resultados indicaram o tipo de resistor, tipo N. Além disso, também nos mostra que nosso sistema pode ser alimentado com uma fonte elétrica de baixa tensão. Nosso resistor negativo, doravante, será identificado simplesmente por  $R_N$ .

Figura 22 – Série temporal do sinal de entrada,  $V_{in}$ , linha preta, com uma frequência de 1kHz e amplitude  $1 V_{pp}$ , e o sinal do Resistor Negativo, linha vermelha. Gráfico I-V com a inclinação negativa da reta, característica de um resistor tipo N.



Fonte: Autor

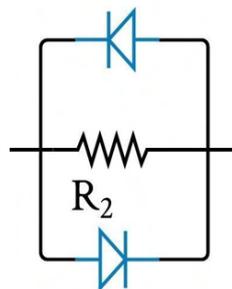
### 4.1.3 DISPOSITIVO NÃO-LINEAR

No sistema G-B, o elemento responsável por introduzir a não-linearidade é composto, basicamente, de dois diodos, na configuração *back-to-back*, e um resistor, como está apresentado no esquema da Fig. (23). O comportamento desse circuito é descrito pela equação que apresentamos na subseção (3.1.1), ou seja,

$$g[V_{in}] = \frac{V_{in}}{R_2} + I_r(e^{\alpha V_{in}} - e^{-\alpha V_{in}}) \tag{4.10}$$

onde  $V_{in}$  é um sinal de entrada,  $I_r = 22.50 \times 10^{-6}$  e  $\alpha = 11.57$  (adimensional).

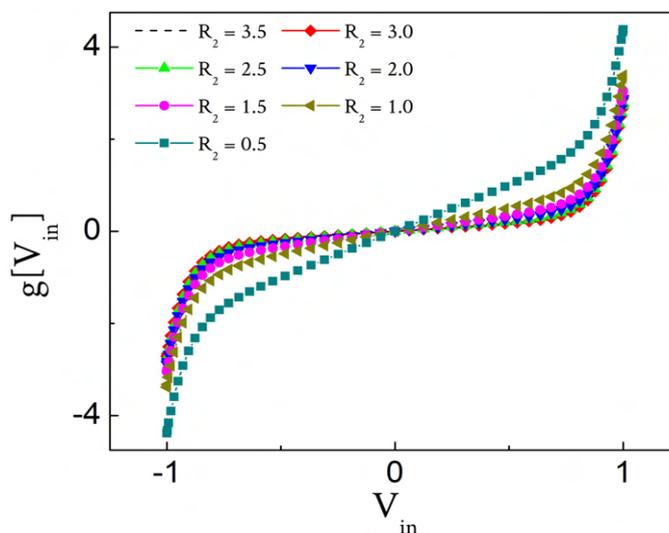
Figura 23 – Dispositivo Não-Linear, composto por dois diodos 1N4148 e um resistor,  $R_2$ .



Fonte: Autor

Calculamos numericamente a Eq. (4.10). Usamos como entrada uma função  $A_{sen}(\omega t)$ , onde  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  é a frequência e  $t$  o tempo. Variamos  $R_2$  para diferentes valores adimensionais (3.5, 3.0, 2.5, 2.0, 1.5, 1.0, 0.5) (já normalizados) para observar o comportamento do circuito. O resultado, desses cálculos, está apresentado na Fig. (24). Como podemos ver, conforme o valor de  $R_2$  tende a zero, a curva característica do elemento tende a uma reta. Iso significa o circuito realiza uma transição de um regime não-linear para o linear.

Figura 24 – Gráfico de  $g[V_{in}]$  para diferentes valores de  $R_2$ , onde  $V_{in}$  é uma função seno.



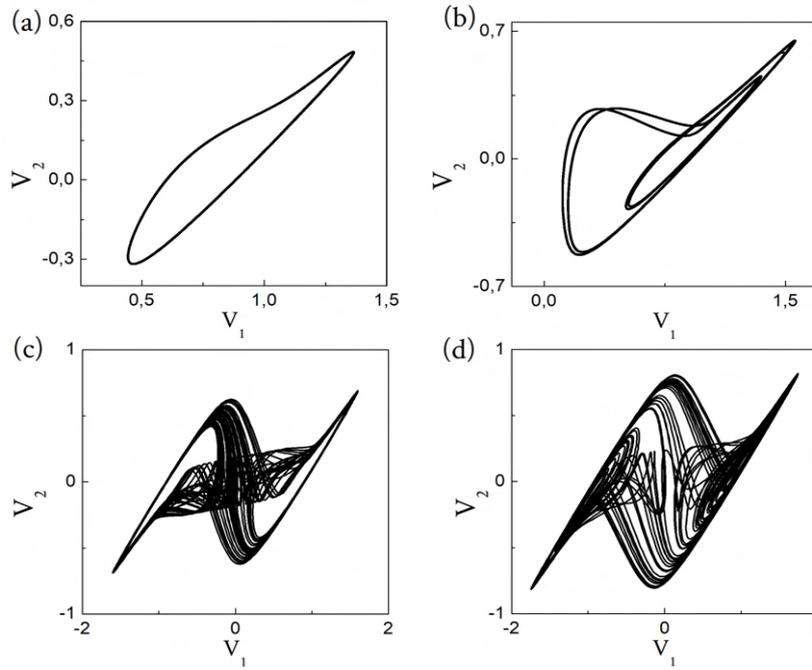
Fonte: Autor

#### 4.1.4 COMPORTAMENTO DO SISTEMA G-B

Vamos analisar o comportamento dinâmico do sistema G-B. Para isso, calculamos numericamente as Eq. (4.6), onde fixamos os valores de alguns parâmetros e variamos apenas um deles. Utilizamos os valores apresentados na seção anterior, que são  $I_r = 22.5 \times 10^{-6}$ ,  $\alpha = 11.57$ ,  $R_1 = 1.300$ ,  $R_3 = 0.193$  e variamos  $R_2$  (1.65, 2.20, 2.70, 3.50), explorando diferentes soluções para cada um desses valores adimensionais.

Na Fig. (25) apresentamos os resultados numéricos para as variáveis  $V_1$  e  $V_2$ . Obtivemos diferentes regimes dinâmicos que o sistema evolue: (1) periódico, Fig.(25a), para  $R_2 = 1.65$ ; (2) multiperiódico, Fig.(25b), para  $R_2 = 2.20$ ; e (3) caótico, Fig. (25c) e (25d), para  $R_2 = 2.70$  e  $R_2 = 3.50$ , respectivamente. Para os regimes apresentados nas Fig. (25). Valores de  $R_2 > 3.50$  o sistema permanece em regime caótico,  $R_2 < 1.65$  permanece periódico até 1.25 e as soluções numéricas divergem com valores abaixo de 1.25.

Figura 25 – Retrato de fase das variáveis  $V_1 \times V_2$ . (a) Regime periódico, com  $R_2 = 1.65$ ; (b) Regime Multiperíodico, com  $R_2 = 2.20$ ; (c) e (d) Regime Caótico,  $R_2 = 2.70$  e  $R_2 = 3.50$ , respectivamente. Os demais parâmetros são iguais em todos os casos, ou seja,  $R_1 = 1.300$ ,  $R_3 = 0.193$ ,  $I_r = 22.5 \times 10^{-6}$  e  $\alpha = 11.57$ .



Fonte: Autor

Uma outra maneira de explorarmos um sistema dinâmico é analisando os seus pontos fixos. Na próxima subseção, vamos analisar os pontos fixos do sistema G-B e construir um diagrama de bifurcação que ratifique os resultados apresentamos acima.

#### 4.1.5 PONTOS FIXOS E DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO

Para determinarmos os pontos fixos do sistema G-B, fazemos

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \dot{I} = 0 \tag{4.11}$$

nas Eq. (4.6) e obtemos

$$V_1 = R_1 g[V_1 - V_2] \tag{4.12a}$$

$$I = g[V_1 - V_2] \tag{4.12b}$$

$$V_2 = R_3 I \tag{4.12c}$$

A partir das Eq. (4.12) temos que,

$$V_1 - V_2 = V = R_1 I - R_3 I \rightarrow V = I(R_1 - R_3), \tag{4.13}$$

conforme vimos anteriormente  $g[V] = V/R_2 - I_r(\exp^{\alpha V} - \exp^{-\alpha V})$  e podemos reescrevê-lo transformando as exponenciais em  $\sinh$ , ou seja,  $g[V] = V/R_2 - 2I_r \sinh(\alpha V)$ . Utilizando as Eq. (4.12b) e Eq. (4.13) na nova função de  $g[V]$ , obtemos

$$\begin{aligned} I &= I \left( \frac{R_1 - R_3}{R_2} \right) + 2I_r \sinh[\alpha(R_1 - R_3)I] = \\ &= I \left( \frac{R_3 - R_1 + R_2}{R_2} \right) = 2I_r \sinh[\alpha(R_1 - R_3)I] = \\ &= I = \left( \frac{2I_r R_2}{R_3 - R_1 + R_2} \right) \sinh[\alpha(R_1 - R_3)I]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Definimos  $I_0 = 2I_r R_2 / (R_3 - R_1 + R_2)$  e  $\alpha_I = \alpha(R_1 - R_3)$ , assim, reescrevemos a Eq. (4.14), que relaciona a localização dos pontos fixos em relação ao parâmetro do sistema:

$$I = I_0 \sinh(\alpha_I I). \quad (4.15)$$

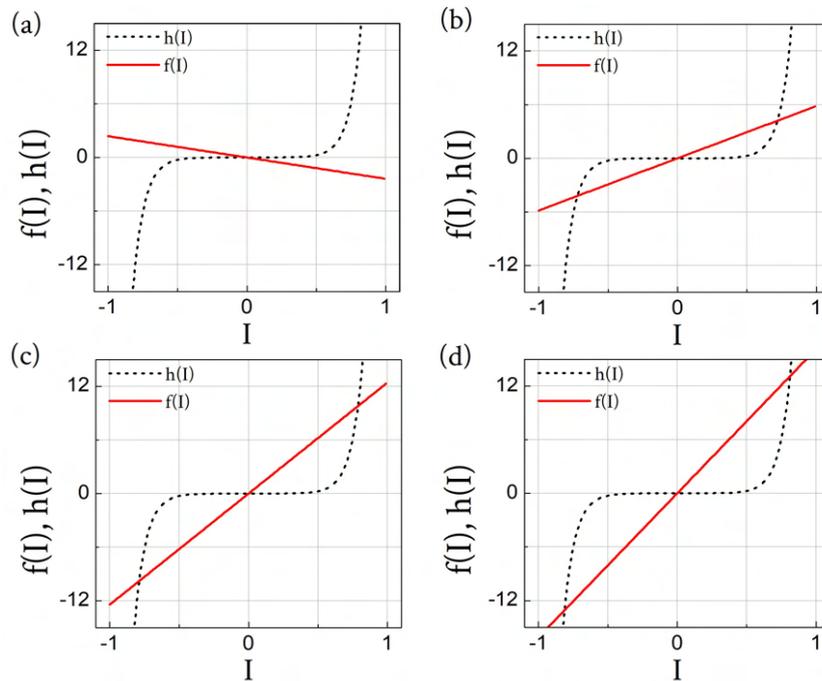
A partir dessa equação transcendental, Eq. (4.15), definiremos duas funções de  $I$ . Sejam elas  $f(I)$  e  $h(I)$ :

$$f(I) = I/I_0 \quad (4.16a)$$

$$h(I) = \sinh(\alpha_I I). \quad (4.16b)$$

Resolvemos numericamente as Eq. (4.16) e variamos o parâmetro  $R_2$  para os seguintes valores adimensionais: (1.0, 1.5, 2.5, 4.0). Os resultados estão apresentados nas Fig. (26). A reta vermelha corresponde a solução de  $f(I)$  e a curva preta a solução de  $h(I)$ . Os pontos fixos são os pontos em que as duas soluções se interceptam. Lembrando que o valor de  $R_2$  muda o regime de evolução do sistema. Temos que, com  $R_2 = 1.0$ , na Fig. (26a), as soluções se cruzam uma única vez, logo, só há um ponto fixo. Na Fig. (26b) com  $R_2 = 1.5$ , as curvas se tocam três vezes, assim, temos três pontos fixos. Permanece com esta mesma quantidade de pontos fixos, quando aumentamos o valor desse parâmetro. Apresentamos os gráficos dos casos com  $R_2 = 2.5$ , Fig. (26c), e com  $R_2 = 4.0$ , Fig. (26d). Esses resultados indicam que o sistema G-B possui três pontos fixos. Outra forma de visualizar este resultado é construindo um diagrama de bifurcação.

Figura 26 – Gráfico das funções  $f(I)$ , reta vermelha, e  $h(I)$ , curva preta: (a)  $R_2 = 1.0$ ; (b)  $R_2 = 1.5$ ; (c)  $R_2 = 2.5$ ; e (d)  $R_2 = 4.0$ .



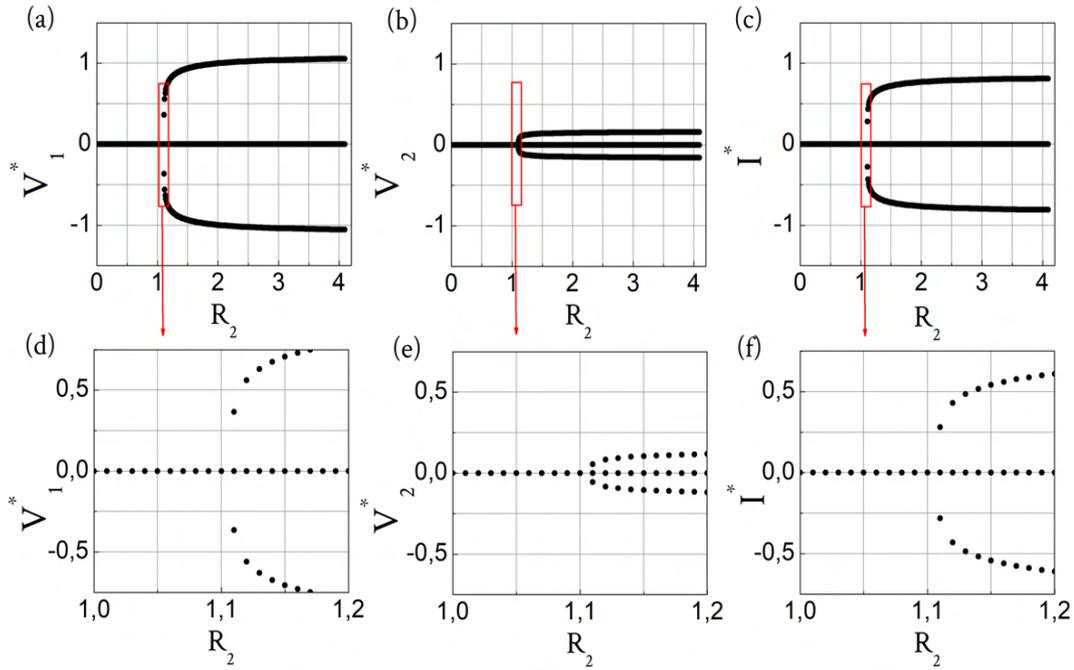
Fonte: Autor

Construímos um diagrama de bifurcação do tipo forquilha (STROGATZ, 1994). Para isso, determinamos numericamente as raízes da equação transcendental, Eq. (4.15), e variamos o valor de  $R_2$  entre 0.0 e 4.1. Apresentamos a solução nas Fig. (27a-c), as quais nos mostram claramente que o sistema G-B possui um ponto fixo para valores de  $R_2 < 1.1$  e três pontos fixos para  $R_2 > 1.1$ . Matematicamente, espera-se que a bifurcação ocorra quando tomamos a derivada dos dois lados da Eq. (4.15) em função de  $I$ , assim, teremos que

$$\frac{d}{dI} \left( \frac{I}{I_0} \right) = \frac{d}{dI} (\text{senh}(\alpha_I I)) \rightarrow R_2 = (R_1 - R_3) / (2I_r \alpha_I - 1), \quad (4.17)$$

utilizando os valores dos parâmetros  $R_1$  e  $R_3$  apresentados na subseção (4.1.4) e substituindo na Eq. (4.17), obtemos  $R_2 \approx 1.1$ . Ou seja, o valor de  $R_2$  onde ocorre a bifurcação de acordo com os resultados apresentados nas Fig. (27d-f), que são uma ampliação de um região selecionada das Fig. (27a-c).

Figura 27 – Diagrama de Bifurcação, variando o parâmetro  $R_2$ : (a), (b) e (c) entre 0.0 e 4.1; e (d), (e), e (f) entre 1.0 e 1.2, uma ampliação da região selecionada de (a), (b) e (c) pela linha vermelha.



Fonte: Autor

Determinado os pontos fixos do sistema, próximo passo é analisar a estabilidade desses pontos. Essa análise consiste em linearizar o sistema e calcular os autovalores da matriz jacobiana em torno do ponto fixo. Consideramos as derivadas das Eq. (4.6) como

$$\dot{V}_{1j} = p(V_{1j}, V_{2j}, I_j); \quad \dot{V}_{2j} = w(V_{1j}, V_{2j}, I_j); \quad \dot{I}_j = m(V_{1j}, V_{2j}, I_j), \quad (4.18)$$

com estas novas definições, podemos reescrever as Eq. (4.18) na sua forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{1j} \\ \dot{V}_{2j} \\ \dot{I}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial V_{1j}} & \frac{\partial p}{\partial V_{2j}} & \frac{\partial p}{\partial I_j} \\ \frac{\partial w}{\partial V_{1j}} & \frac{\partial w}{\partial V_{2j}} & \frac{\partial w}{\partial I_j} \\ \frac{\partial m}{\partial V_{1j}} & \frac{\partial m}{\partial V_{2j}} & \frac{\partial m}{\partial I_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1j} \\ V_{2j} \\ I_j \end{bmatrix}$$

onde

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial V_{1j}} & \frac{\partial p}{\partial V_{2j}} & \frac{\partial p}{\partial I_j} \\ \frac{\partial w}{\partial V_{1j}} & \frac{\partial w}{\partial V_{2j}} & \frac{\partial w}{\partial I_j} \\ \frac{\partial m}{\partial V_{1j}} & \frac{\partial m}{\partial V_{2j}} & \frac{\partial m}{\partial I_j} \end{bmatrix}$$

é a matriz jacobiana do sistema linearizado. A partir de  $J$  podemos determinar os autovalores do sistema. Para isso, devemos calcular o determinante

$$\det = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial V_{1j}} - \lambda & \frac{\partial p}{\partial V_{2j}} & \frac{\partial p}{\partial I_j} \\ \frac{\partial w}{\partial V_{1j}} & \frac{\partial w}{\partial V_{2j}} - \lambda & \frac{\partial w}{\partial I_j} \\ \frac{\partial m}{\partial V_{1j}} & \frac{\partial m}{\partial V_{2j}} & \frac{\partial m}{\partial I_j} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

resolvendo o determinante, obtemos um polinômio  $a\lambda^3 - b\lambda^2 + c\lambda + d$ , onde  $a = 1.0$ ,  $b = -(1.0/R_1 - 2\beta - R_3)$ ,  $c = (-\beta/R_1 + \beta^2) + (-R_3/R_1 + R_3\beta) + R_3\beta - \beta^2 + 1$  e  $d = -(-R_3\beta/R_1 - R_3\beta^2) - (1.0/R_1 - \beta) - R_3\beta^2$ . Sendo  $\beta = 1.0/R_2 + 2I_r \cosh[\alpha(V_1 - V_2)]$ . Assim, a solução do polinômio é dada por

$$\Delta_0 = b^2 - 3ac \quad (4.19a)$$

$$\Delta_1 = 2b^3 - 9abc + 27da^2 \quad (4.19b)$$

$$\chi_1 = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}} \quad (4.19c)$$

$$\chi_2 = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 - \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}. \quad (4.19d)$$

Assim, obtemos três autovalores para o sistema G-B:

$$\lambda_0 = \frac{-1}{3a} \left( b + \chi_x + \frac{\Delta_0}{\chi_x} \right) \quad (4.20a)$$

$$\lambda_1 = \frac{-1}{3a} \left( b + \epsilon_1 + \frac{\Delta_0}{\epsilon_1} \right) \quad (4.20b)$$

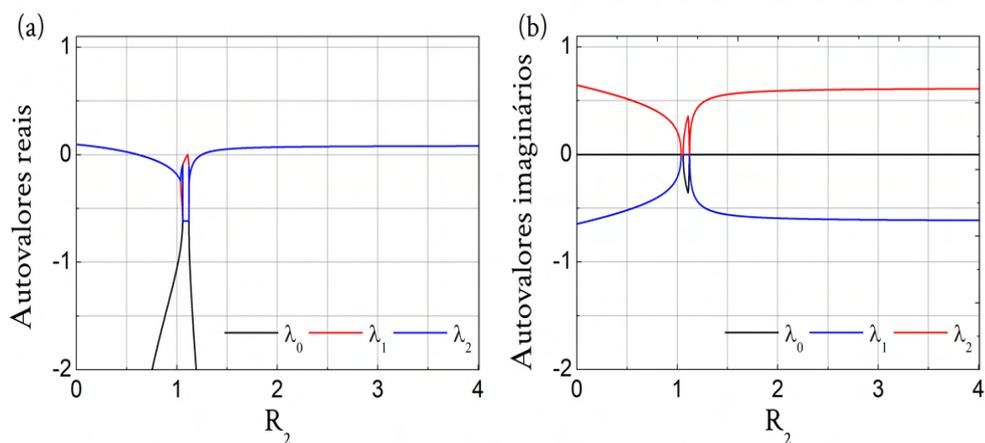
$$\lambda_2 = \frac{-1}{3a} \left( b + \epsilon_2 + \frac{\Delta_0}{\epsilon_2} \right), \quad (4.20c)$$

onde  $\chi_x = \chi_1$  se  $\chi_1 > \chi_2$ , caso contrário  $\chi_x = \chi_2$ ,  $\epsilon_1 = \chi_x(-1 + \sqrt{-3})/2$  e  $\epsilon_2 = \chi_x[(-1 + \sqrt{-3})/2]^2$ . Para determinarmos a estabilidade dos pontos fixos, nós escolhemos três pontos fixos,  $V_1^*$ ,  $V_2^*$  e  $I^*$ , localizados: 1) no semieixo positivo, 2) na origem, e 3) no semieixo negativo. Todos os pontos fixos foram escolhidos do diagrama de bifurcação apresentado na Fig. (27). Para cada um dos casos, calculamos os autovalores em função da variação do parâmetro  $R_2$ .

O resultado para o caso calculado no semieixo positivo está apresentado na Fig. (28). Note que os pontos fixos no semieixo positivo surgem apenas após a bifurcação, onde os autovalores,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , passam de valores negativos para positivos e dominam a dinâmica. Isso significa que ocorre uma mudança na sua estabilidade, ou seja, de estável ( $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ) para instável ( $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ). No caso da origem, Fig. (29), onde

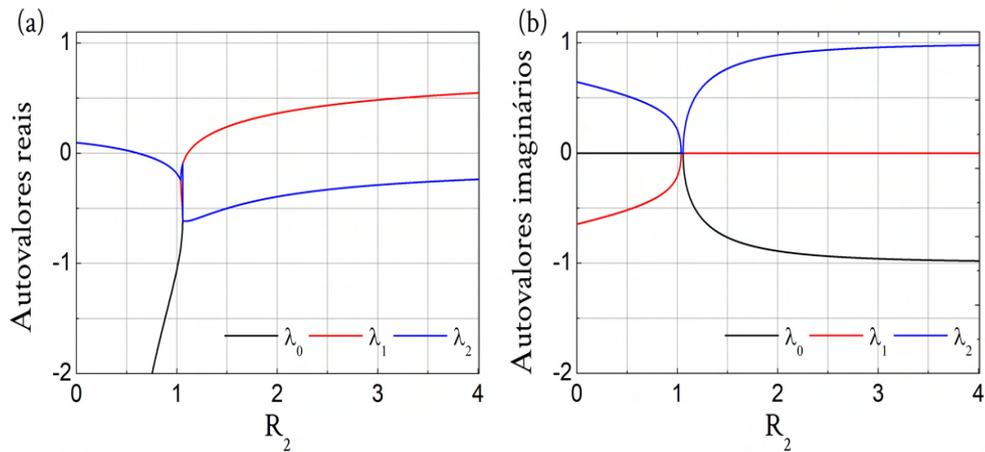
há ponto fixo antes da bifurcação, temos que na direção de  $\lambda_0$ , a origem é estável e permanece na variação de  $R_2$ , na direção de  $\lambda_1$  a origem muda sua estabilidade de instável para estável antes da bifurcação e depois da bifurcação é novamente alterada para instável e o inverso ocorre na direção de  $\lambda_2$  depois da bifurcação, ou seja, permanece estável. Esse comportamento apresentado por meio dos autovalores caracteriza a origem como ponto fixo do tipo sela, onde em uma determinada direção diverge e por outra converge. No semieixo negativo, Fig. (30), por simetria, a mudança de estabilidade ocorre da mesma maneira que no semieixo positivo. Portanto, podemos entender que para valores de  $R_2$  antes do ponto de bifurcação, o sistema G-B irá apresentar apenas um ponto fixo do tipo sela, onde qualquer perturbação faz com que a trajetória tenda a zero ou espirale divergindo dele. Aumentando o valor de  $R_2$  encontraremos soluções onde o sistema tende para órbitas periódicas. Quando  $R_2$  atinge o valor da bifurcação, ou seja,  $R_2 \approx 1.1$ , ocorre uma bifurcação do tipo forquilha e o sistema passa a obter três pontos fixos, onde dois são simétricos. Após a bifurcação, os três pontos fixos e suas respectivas estabilidades permanecem iguais para qualquer valor de  $R_2$ .

Figura 28 – Autovalores calculados com ponto fixo localizado no semieixo positivo em função da variação do parâmetro  $R_2$  entre 0.0 e 4.0:  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  parte (a) real e (b) imaginária.



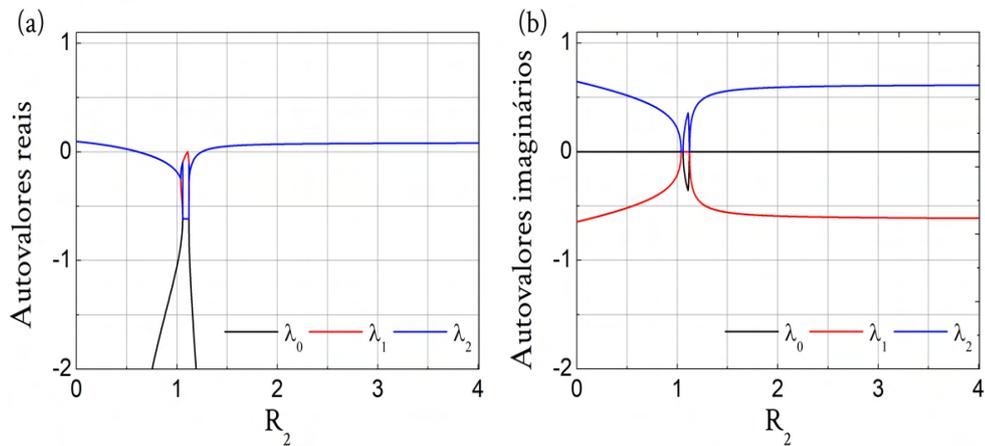
Fonte: Autor

Figura 29 – Autovalores calculados com ponto fixo localizado na origem em função da variação do parâmetro  $R_2$  entre 0.0 e 4.0:  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  parte (a) real e (b) imaginária.



Fonte: Autor

Figura 30 – Autovalores calculados com ponto fixo localizado no semieixo negativo em função da variação do parâmetro  $R_2$  entre 0.0 e 4.0:  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  parte (a) real e (b) imaginária.



Fonte: Autor

Nesta seção, nós exploramos cada parte que compõe o sistema G-B, como também seu comportamento dinâmico e a estabilidade do seus pontos fixos. Na próxima seção, realizaremos um acoplamento entre dois osciladores do sistema G-B e analisaremos a convergência entre eles.

## 4.2 ACOPLAMENTO ENTRE DOIS OSCILADORES

Descrito o sistema G-B, vamos acoplar dois desses osciladores e analisar a qualidade do sincronismo. Utilizaremos a configuração chamada na literatura de mestre-escravo com acoplamento unidirecional. Doravante, iremos chamar essa configuração

de diretor-receptor. Tomamos os valores dos parâmetros, de ambos osciladores, em regime caótico, como foram apresentados na subseção (4.1.4). Também permitimos 1% de diferença entre os parâmetros de um oscilador em relação ao outro. Ressaltamos que os valores dos parâmetros utilizados são adimensionais. Essa diferença nos parâmetros, que não compromete o sincronismo, testa a robustez do sincronismo. Testamos dois tipos de acoplamentos: 1) através da variável  $V_1$ ; e 2) através da variável  $V_2$ .

A dinâmica do acoplamento é governada por equações diferenciais do tipo,

$$\dot{\vec{X}}_d = \vec{F}(\vec{X}_d) \quad (4.21a)$$

$$\dot{\vec{X}}_r = \vec{F}(\vec{X}_r, \vec{h}(t)), \quad (4.21b)$$

onde  $\vec{X}_d = (V_{1d}, V_{2d}, I_d)$  e  $\vec{X}_r = (V_{1r}, V_{2r}, I_r)$  são as variáveis de estado que corresponde ao oscilador diretor e receptor, respectivamente.  $\vec{F}(\vec{X})$  é o fluxo de cada oscilador e  $\vec{h}(t)$  é um função que consiste na diferença entre as variáveis correspondentes dos dois osciladores.

Aplicando as Eq. (4.21) às Eq. (4.6), que descreve os osciladores diretor e receptor separadamente, obtemos um conjunto de seis equações diferenciais que descreve o acoplamento aditivo unidirecional:

Oscilador diretor:

$$\dot{V}_{1d} = \frac{V_{1d}}{R_{1d}} - g[V_{1d} - V_{2d}] \quad (4.22a)$$

$$\dot{V}_{2d} = g[V_{1d} - V_{2d}] - I_d \quad (4.22b)$$

$$\dot{I}_d = V_{2d} - I_d R_{3d}, \quad (4.22c)$$

Oscilador receptor:

$$\dot{V}_{1r} = \frac{V_{1r}}{R_{1r}} - g[V_{1r} - V_{2r}] + K_{11}c_1(V_{1d} - V_{1r}) \quad (4.23a)$$

$$\dot{V}_{2r} = g[V_{1d} - V_{2r}] - I_r + K_{22}c_2(V_{2d} - V_{2r}) \quad (4.23b)$$

$$\dot{I}_r = V_{2r} - I_r R_{3r} + K_{33}c_3(I_d - I_r), \quad (4.23c)$$

onde  $c_1, c_2, c_3$  são os coeficientes de acoplamento e  $\mathbf{K}$  é a matriz de acoplamento, porém, nós consideramos apenas os termos diagonais  $[K_{11}, K_{22}, K_{33}]$ , os demais termos,  $K_{ij}$   $i \neq j$ , são todos nulos. A seguir vamos considerar o acoplamento unidirecional apenas com uma variável. Assim, quando o acoplamento for realizado através da variável  $V_1$ ,  $K_{22}$  e  $K_{33}$  serão igual a zero, o que permite que apenas a informação de  $V_1$  do oscilador diretor seja passada para o receptor. Quando realizarmos o acoplamento por intermédio da variável  $V_2$ ,  $K_{11}$  e  $K_{33}$  serão igual a zero.

Em nossa análise, iremos considerar a construção dos gráficos entre as variáveis correspondentes (retrato de fase), conforme vimos na seção (3.1), onde a sincronização completa pode ser identificada como uma reta na diagonal, que ocorre quando os sinais estão sobrepostos na série temporal, mesma fase e amplitude. Outra forma de analisarmos a sincronização é calculando a medida da diferença entre as trajetórias dos osciladores acoplados, medida através de uma grandeza  $|x_{\perp}|$  que definimos como distância escalar:

$$|x_{\perp}| = |V_{1d} - V_{1r}| + |V_{2d} - V_{2r}| + |I_d - I_r|. \quad (4.24)$$

Seguindo essa definição, consideramos que dois osciladores estejam sincronizados, quando  $|x_{\perp}| = 0$ . Ou seja,  $V_{1d} = V_{1r}$ ,  $V_{2d} = V_{2r}$  e  $I_d = I_r$ . Esse resultado caracteriza a sincronização completa, a qual iremos explorar no acoplamento em  $V_1$ . No entanto, nem sempre  $|x_{\perp}|$  apresenta o resultado descrito anteriormente, isso quer dizer que ao longo da evolução temporal pode apresentar momentos onde, por exemplo,  $V_{1d} \neq V_{1r}$ . Isso significa que mesmo estando acoplados, pode haver momentos em que irão desacoplar. Analisaremos esse caso no acoplamento em  $V_2$ , adiante.

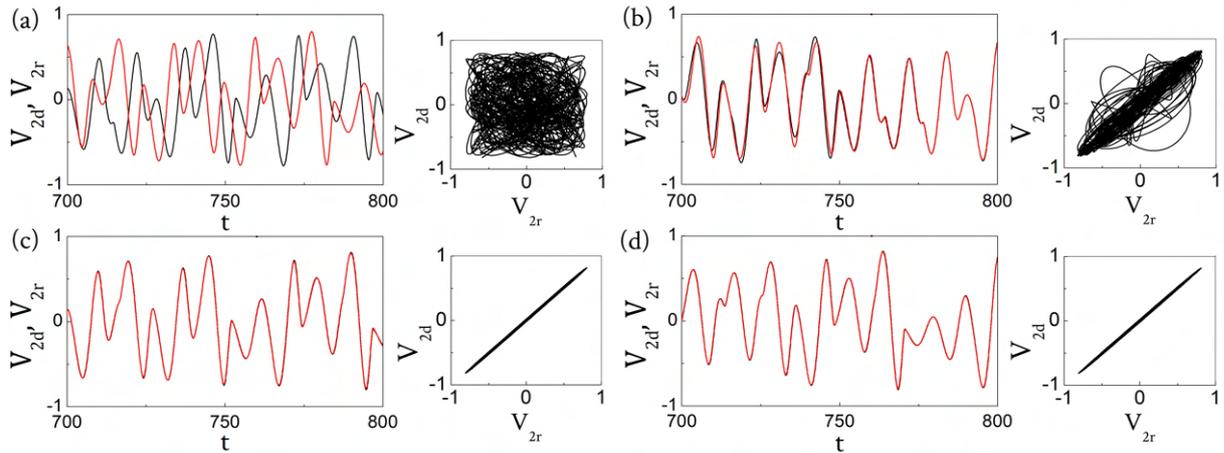
#### 4.2.1 ACOPLAMENTO ATRAVÉS DA VARIÁVEL $V_1$

Consideramos o acoplamento com a variável  $V_1$ , onde a configuração utilizada segue as Eq. (4.22) e Eq. (4.23), com  $K_{11} = 1.0$  e  $K_{22} = K_{33} = 0$ . Para os parâmetros do oscilador diretor, tomamos  $R_{1d} = 1.300$ ,  $R_{2d} = 3.440$ ,  $R_{3d} = 0.193$ , e do oscilador receptor,  $R_{1r} = 1.313$ ,  $R_{2r} = 3.475$ ,  $R_{3r} = 0.195$  (1% de diferença em relação ao diretor). Lembrando a importância de utilizarmos osciladores com parâmetros diferentes, que possibilita testar a robustez da configuração de acoplamento e considerando que, na prática, os componentes eletrônicos possuem uma tolerância em relação ao seu valor nominal. Estabelecemos, então, valores fixos para os parâmetros e iremos utilizar o coeficiente de acoplamento,  $c_1$ , como parâmetro que mudamos para análise de acoplamento.

Calculamos numericamente as Eq. (4.22) e Eq. (4.23) segundo as condições acima definidas e variamos o valor de  $c_1$ : (0.00, 0.25, 0.50, 0.80). Na Fig. (31a), onde  $c_1 = 0.00$ , os osciladores estão dessincronizados, as fases e amplitudes estão descorrelacionadas, evoluindo livremente. Essa descorrelação se reflete no retrato de fase das variáveis  $V_{2r} \times V_{2d}$ , onde as trajetórias são independentes. Quando  $c_1$  assume um valor igual a 0.25, os osciladores apresentam uma mudança de comportamento, com clara tendência para o estado de sincronismo. Podemos observar essa tendência na série temporal da Fig. (31b), que em alguns momentos eles dessincronizam e em outros sincronizam. Consequentemente, o retrato de fase apresenta uma tendência à formação de uma reta na diagonal. Finalmente, com  $c_1 = 0.50$  os osciladores sincronizam

perfeitamente, assim como com  $c_1 = 0.80$ , conforme está apresentado nas Fig.(31c-d).

Figura 31 – Sistema G-B, acoplamento aditivo unidirecional entre dois osciladores via a variável  $V_1$ . Séries temporais e retratos de fase das variáveis  $V_{2d}$  e  $V_{2r}$  para (a)  $c_1 = 0.00$ ; (b)  $c_1 = 0.24$ ; (c)  $c_1 = 0.50$ ; (d)  $c_1 = 0.80$ .

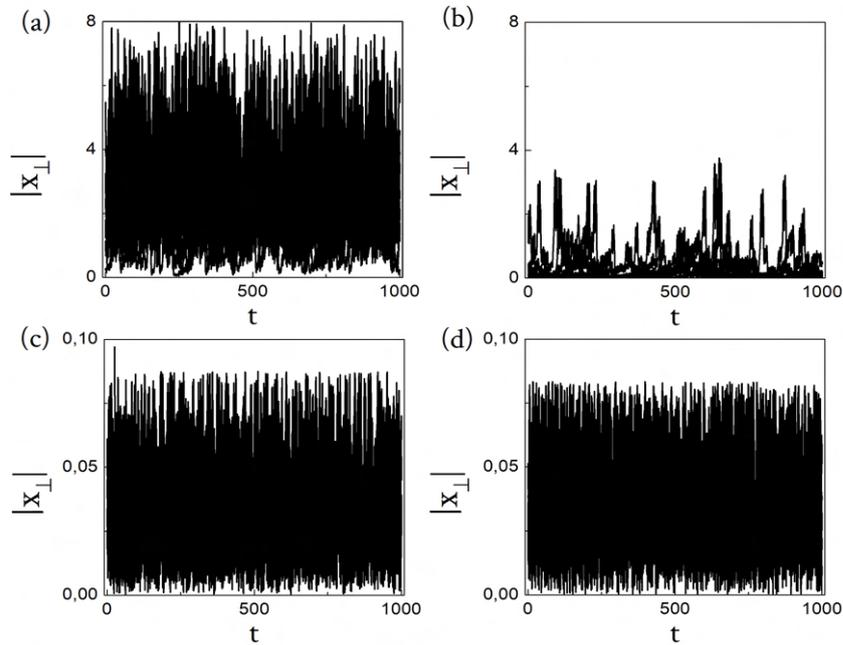


Fonte: Autor

Também calculamos  $|x_{\perp}|$ , Eq. (4.24), para este caso. As Fig. (32), mostram a medida de distância  $|x_{\perp}|$  para os diferentes valores de  $c_1$  utilizados acima, em função do tempo. Devemos ressaltar que os osciladores sincronizam perfeitamente, quando a medida do  $|x_{\perp}|$  tende a zero. Na Fig. (32a), podemos notar que a amplitude do sinal é máxima, ratificando os resultados das Fig. (31a-b) de completa dessincronização. Conforme aumentamos o nível de acoplamento, os osciladores tendem a sincronizar. Com  $c_1 = 0.25$ , a distância escalar tem sua amplitude reduzida praticamente pela metade, Fig. (32b), em comparação com o resultado da Fig. (32a), mas eles ainda não estão sincronizados. A Fig.(32c) nos mostra a solução de  $|x_{\perp}|$  com valores próximos de zero, logo, os osciladores atingem o estado de sincronização completa. O mesmo ocorre quando  $c_1 = 0.80$ , Fig. (32d). Há uma diferença na escala das séries temporais das Fig. (32a-d), essa diferença foi deixada para facilitar a visualização dos valores da distância escalar, que se aproxima de zero conforme  $c_1$  cresce.

Podemos estimar a tendência da distância escalar em função de  $c_1$ . Calculamos o valores máximos e médios do  $|x_{\perp}|$ , para cada valor de  $c_1$  entre 0.0 e 1.0. O valor médio,  $|x_{\perp}|_{rms}$ , pode ser encontrado calculando a  $\sqrt{\langle |x_{\perp}|^2 \rangle}$  e o máximo,  $|x_{\perp}|_{max}$ , como maior valor instantâneo do sinal de erro. O resultado apresentado na Fig. (33), nos mostra que as medidas máximas e médias decaem para a zero, conforme o valor de  $c_1$  aumenta. Essa rápida tendência significa uma melhor convergência entre os osciladores acoplados. Como vimos anteriormente,  $|x_{\perp}| \rightarrow 0$ , ocorre sincronização. Nos casos em que ocorre eventos de dessincronização, os valores de  $|x_{\perp}|_{max}$  e  $|x_{\perp}|_{rms}$ , são maiores, observado na região entre 0.0 e 0.2. Acima desses valores,  $0.2 < c_1 < 0.4$ , os osciladores entram na região de transição do estado de dessincronismo para o sincronismo, até que

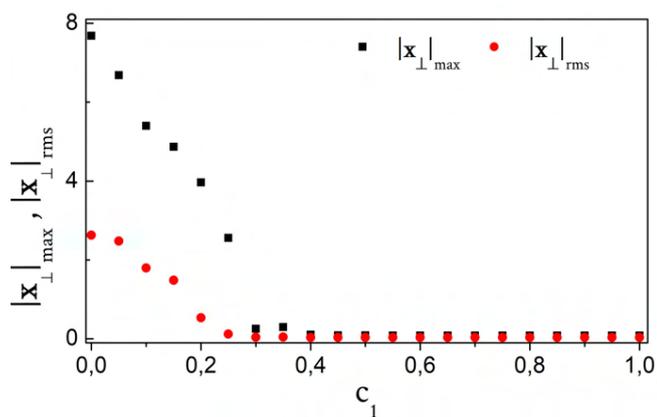
Figura 32 – Série temporal da distância escalar entre as trajetórias dos osciladores acoplados via  $V_1$ ,  $|x_\perp|$ , para (a)  $c_1 = 0.0$ ; (b)  $c_1 = 0.24$ ; (c)  $c_1 = 0.50$ ; e (d)  $c_1 = 0.80$ .



Fonte: Autor

atingem a sincronização completa a partir de  $c_1 = 0.4$ .

Figura 33 – Medida de convergência entre os osciladores, diretor e receptor, acoplados via  $V_1$ . Gráfico dos  $|x_\perp|_{max}$ , quadrado preto, e  $|x_\perp|_{rms}$ , bola vermelha, em função do coeficiente de acoplamento,  $c_1$ , variando entre 0.0 e 1.0.



Fonte: Autor

Nós verificamos que o acoplamento por meio da variável  $V_1$ , os dois osciladores sincronizam completamente. Na próxima subseção, vamos analisar como sincronizam os mesmos dois osciladores no acoplamento por intermédio de  $V_2$ .

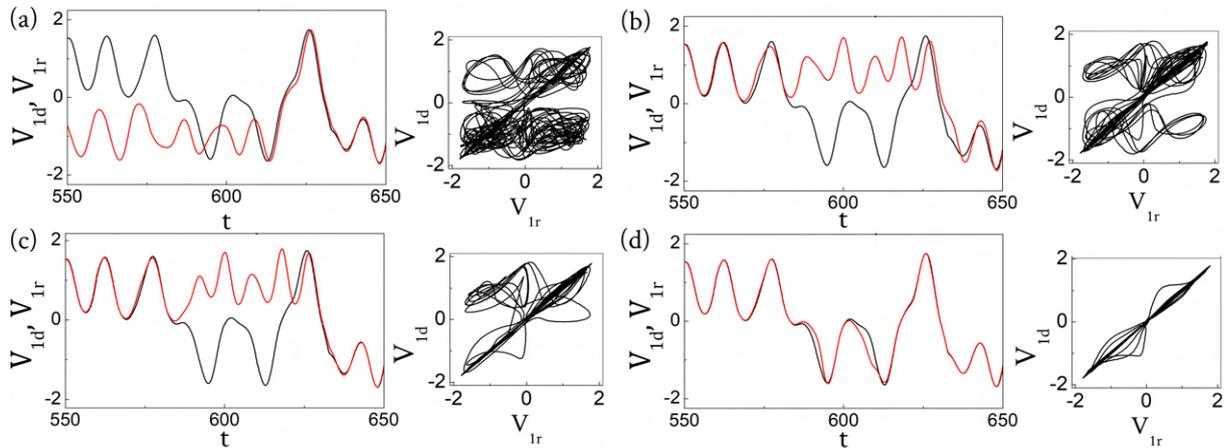
#### 4.2.2 ACOPLAMENTO ATRAVÉS DA VARIÁVEL $V_2$

Na subseção anterior (4.2.1), nós analisamos o caso com  $K_{11} = 1.0$  e  $K_{22} = K_{33} = 0$ . Aqui, vamos analisar o caso com  $K_{22} = 1.0$  e  $K_{11} = K_{33} = 0$ . Ou seja, estamos acionando o acoplamento apenas com a variável  $V_2$ . Continuamos utilizando a mesma configuração de acoplamento, diretor-receptor, e os mesmos valores dos parâmetros da subseção anterior.

Resolvemos numericamente as Eq. (4.22) e Eq. (4.23) conforme as definições modificadas acima e variamos o nível de acoplamento,  $c_2$ , para diferentes valores (0.4, 0.8, 1.5, 3.0). Note que até  $c_2 = 0.4$ , Fig. (34a), os osciladores não estão sincronizados, diferentemente do caso com acoplamento em  $V_1$  (subseção 4.2.1), em que vimos a partir desse valor o acoplamento já é suficiente para ocorrer sincronismo entre os osciladores (ver Fig. (31)). Ou seja, o sinal  $V_2$  necessita de acoplamento maior para conduzir ao estado de sincronismo. No entanto, conforme aumentamos o valor de  $c_2$  a convergência aumenta, mas não completamente, mesmo para grandes valores de  $c_2$ , Fig. (34b-c). Note que a partir de  $c_2 = 3.0$ , os osciladores atingem um estado sincronismo parcial, que apresentam breves momentos de desacoplamento. Podemos observar esse comportamento na série temporal da Fig. (34d), onde os osciladores estão sincronizados na maior parte do tempo e em alguns momentos eles dessincronizam e depois retornam a sincronizar. Chamaremos esse comportamento de fugas de Eventos de Dessincronização. Isso se reflete no retrato de fase das variáveis  $V_{1r} \times V_{1d}$ . Note que não há uma reta bem definida na diagonal, típica da sincronização completa, mas uma curva que se aproxima dessa região, Fig. (34d). Esse tipo de sincronização não foi abordada no Capítulo 3, mas é conhecida na literatura como sincronização intermitente (PLATT; SPIEGEL; TRESSER, 1993; HEAGY; PLATT; HAMMEL, 1994; CHERN et al., 1998; GAUTHIER; BIENFANG, 1996).

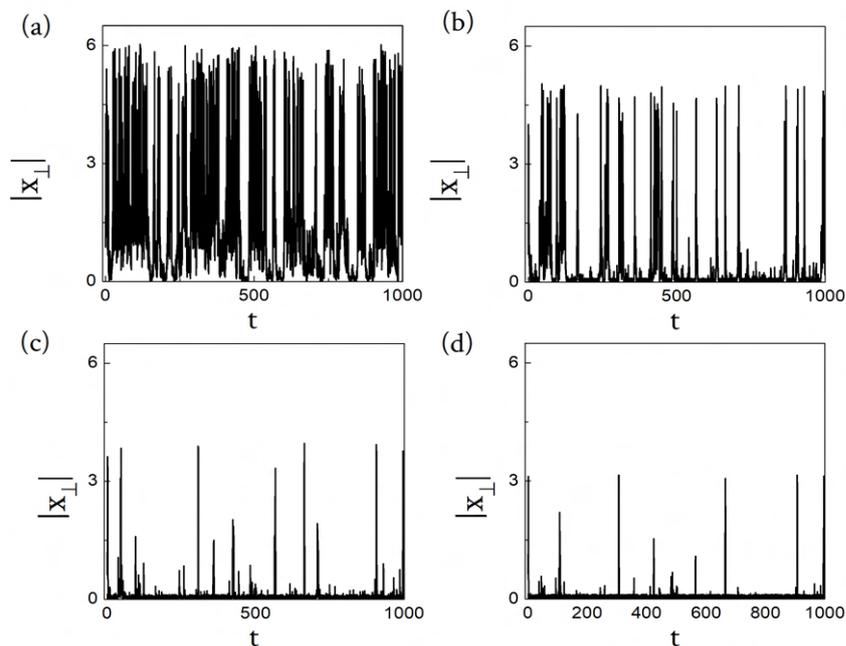
Medimos a distância escalar,  $|x_{\perp}|$ , para verificar o comportamento na diferença das trajetórias dos osciladores acoplados. Utilizamos os mesmos valores de  $c_2$  acima. Na Fig. (350a), as amplitudes dos eventos de dessincronismo são máximas, ou seja, estão completamente descorrelacionados, confirmando os resultados das Fig. (34a-b). Como vimos acima, o aumento do nível de acoplamento tende a reduzir a ocorrência desses eventos. Os resultados apresentados nas Fig. (350b-c), nos mostra essa tendência. No entanto, eles não desaparecem completamente, mesmo com um acoplamento alto, como  $c_2 = 3.0$ , Fig. (350d). Eles aparecem com uma frequência menor em relação aos outros casos. Note que nos caos a partir de  $c_2 = 0.8$  (Fig. (350b)) em diante, a sincronização ocorre quando  $|x_{\perp}|$  vai a zero e ela é "quebrada" quando a intermitência ocorre e, conseqüentemente, as amplitudes do sinal aumentam.

Figura 34 – Sistema G-B, acoplamento aditivo unidirecional entre dois osciladores via a variável  $V_2$ . Séries temporais e retratos de fase das variáveis  $V_{1d}$  e  $V_{1r}$ : para (a)  $c_2 = 0.4$ ; (b)  $c_2 = 0.8$ ; (c)  $c_2 = 1.4$ ; (d)  $c_2 = 3.0$ .



Fonte: Autor

Figura 35 – Série temporal da distância escalar entre as trajetórias dos osciladores acoplados via  $V_2$  do  $|x_{\perp}|$ , para (a)  $c_2 = 0.4$ ; (b)  $c_2 = 0.8$ ; (c)  $c_2 = 1.4$ ; e (d)  $c_2 = 3.0$ .

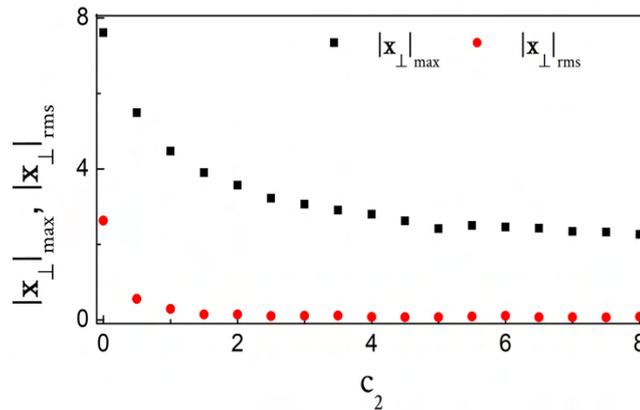


Fonte: Autor

Também estimamos a tendência das medidas máxima e média da distância escalar,  $|x_{\perp}|$ , ou seja,  $|x_{\perp}|_{max}$  e  $|x_{\perp}|_{rms}$ , respectivamente. Construímos o gráfico em função de  $c_2$ , com os valores de  $c_2$  variando entre 0.0 e 8.0. Apresentamos o resultado na Fig. (36). As medidas não tendem a zero tão rápido quanto na Fig. (33), além disso,  $|x_{\perp}|_{rms}$  só tende a zero para valores de  $c_2 > 1.0$ , assinalando uma sincronização inter-

metente. Enquanto que  $|x_{\perp}|_{max}$  não tende a zero para nenhum valor de  $c_2$ , indicando que ainda ocorre eventos de dessincronismo no acoplamento entre os osciladores.

Figura 36 – Medida de convergência entre os osciladores, diretor e receptor, acoplados via  $V_2$ . Gráfico dos  $|x_{\perp}|_{max}$  (quadrado preto) e  $|x_{\perp}|_{rms}$  (bola vermelha) em função da força de acoplamento,  $c_2$ , variando de 0.0 a 8.0.



Fonte: Autor

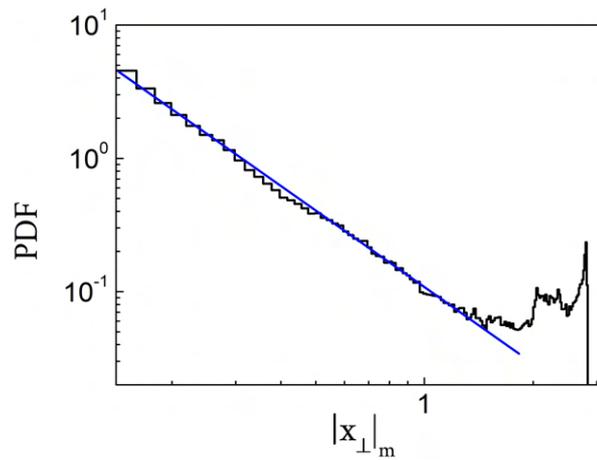
Na próxima subseção, iremos analisar a ocorrência desses eventos a partir da série temporal do  $|x_{\perp}|$ .

#### 4.2.3 ANÁLISE ESTATÍSTICA DOS EVENTOS DE DESSINCRONISMO

Nós vimos anteriormente, na subseção (4.1.5), que o sistema G-B possui regiões instáveis e estáveis identificados pelo pontos fixos, imersos no atrator caótico. Quando realizamos o acoplamento em  $V_1$ , ele é forte o suficiente para manter o sincronismo entre os osciladores, mesmo quando as trajetórias passam por regiões instáveis (pontos fixos instáveis) no espaço de fase. Por isso, não observamos eventos de dessincronismo nesse tipo de acoplamento. Isso é diferente para o acoplamento em  $V_2$ . A instabilidade dessas regiões interferem na sincronização, separando brevemente as trajetórias dos osciladores acoplados. Gerando, então, a sincronização intermitente, caracterizada por breves eventos de dessincronismo. Aqui nós iremos analisar estatisticamente a frequência desses eventos.

A partir da série temporal do  $|x_{\perp}|$ , obtida numericamente com  $c_2 = 4.0$ , construímos um histograma dos máximos locais,  $|x_{\perp}|_m$ , dessa série e em seguida calculamos a função de distribuição de probabilidade (PDF). Apresentamos o resultado numérico na Fig. (37), observe que o histograma não segue a distribuição estatística normal (gaussiana), mas uma distribuição do tipo lei de potência (NEWMAN, 2005) e para os valores extremos da distribuição ocorre um desvio positivo na densidade de probabilidade. Esse resultado caracteriza um evento-extremo conhecido na literatura por Dragão-Rei (SORNETTE, 2010; KITTEL; PYRAGAS; RICHTER, 1994).

Figura 37 – Histograma do  $|x_{\perp}|$ . Observamos o evento extremo Dragão-Rei, com  $c_2 = 4.0$  e 1% de diferença entre os parâmetros dos osciladores acoplados.



Fonte: Autor

Embora seja possível a previsibilidade dos eventos extremos (SORNETTE, 2010; KITTEL; PYRAGAS; RICHTER, 1994), o PDF que segue a distribuição por lei de potência, não possibilita prever a magnitude desses eventos. O mesmo evento pode apresentar amplitudes diferentes em circunstâncias diferentes. Cavalcante *et al* (CAVALCANTE *et al.*, 2013), usando do sistema G-B, demonstraram a previsibilidade do Dragão-Rei e propuseram um técnica de controle. Além disso, eles confirmaram a origem dos eventos de dessincronização para dois osciladores, do sistema G-B, acoplados. Eles calcularam a soma do módulo de cada variável do oscilador diretor,  $|x_d| = |V_{1d}| + |V_{2d}| + |I_d|$ , já que o oscilador receptor segue ele, e quando as trajetórias do diretor passa suficientemente próximo da origem, ocorre os eventos de dessincronização de grande amplitude. A técnica proposta consiste em acionar o acoplamento na variável  $V_1$  sempre que um evento de dessincronização fosse ocorrer. Consequentemente, os eventos são mitigados.

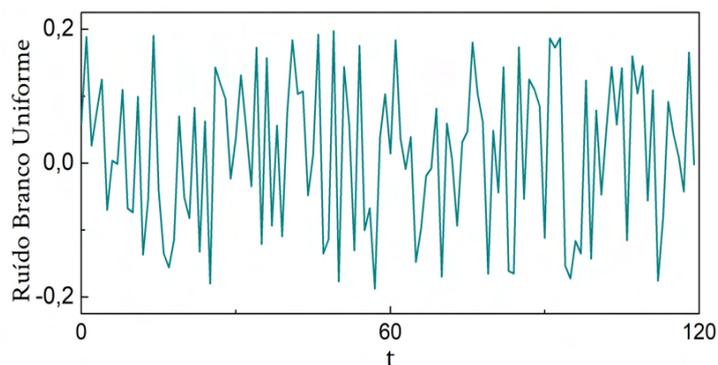
Nós testamos uma outra abordagem de intervenção. Ao invés de acionar o acoplamento em  $V_1$ , adicionamos um ruído branco uniforme no acoplamento. A hipótese dessa proposta, consiste em interferir, com ruído, o sincronismo intermetente, de maneira que possa mitigar os eventos extremos. Vamos escrever as equações do oscilador receptor com o termo que represente a adição do ruído:

$$\dot{V}_{1r} = \frac{V_{1r}}{R_{1r}} - g[V_{1r} - V_{2r}] \quad (4.25a)$$

$$\dot{V}_{2r} = g[V_{1d} - V_{2r}] - I_r + K_{22}c_2(\nu - V_{2r}) \quad (4.25b)$$

$$\dot{I}_r = V_{2r} - I_r R_{3r}, \quad (4.25c)$$

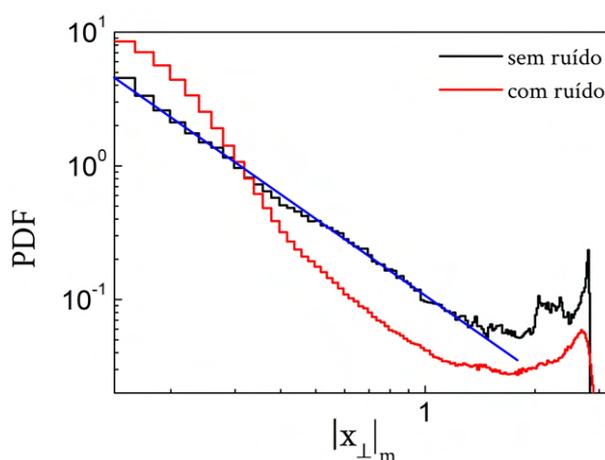
onde  $\nu = V_{1d} + \text{ruído}$ . Este ruído oscila entre  $\pm 0.2$ , observe a Fig. (38).

Figura 38 – Ruído Branco Uniforme  $\pm 0.2$ 

Fonte: Autor

Seguindo a proposta acima, resolvemos numericamente este caso e apresentamos o resultado na Fig. (39), onde comparamos os casos sem (linha preta) e com (linha vermelha) ruído. Não obtivemos um efeito de supressão dos grandes eventos, mas aumentamos o nível de amplitude dos eventos menores, diminuímos relativamente a amplitude do evento extremo e suavizou a curva da distribuição da lei de potência, indicando uma forte tendência para descaracterizá-la. Essa técnica de intervenção atinge todo o histograma, tornando difícil modificar unicamente a região dos grandes eventos. Não aprofundamos esses estudos na busca de uma técnica que possibilite a mitigação da ocorrência de eventos do tipo Dragão-Rei.

Figura 39 – Histograma dos máximos locais do  $|x_{\perp}|$  sem, linha preta, e com, linha vermelha, ruído, onde não ocorreu a mitigação do evento extremo, do tipo Dragão-Rei.



Fonte: Autor

No próximo capítulo, iremos apresentar uma análise da sincronização em uma configuração de acoplamento diferente do que foi apresentado neste capítulo. Essa configuração consiste, basicamente, do aumento do número de osciladores diretores adicionados no oscilador receptor, onde apresentaremos resultados completamente

originais, tanto experimental quanto numérico. Usando tanto o sistema G-B, como também o sistema de Lorenz.

## 5 SINCRONISMO DE UM OSCILADOR CAÓTICO COM UMA SUPERPOSIÇÃO DE SINAIS

No capítulo anterior apresentamos e exploramos o sistema Gauthier-Bienfang (G-B) analisando sua dinâmica e sua sincronização com outro oscilador equivalente, através de acoplamento unidirecional. Neste capítulo, nós iremos expandir o conceito de sincronização em uma configuração de acoplamento diferente, onde aumentamos o número de osciladores diretores. Nessa configuração somamos linearmente os sinais de vários osciladores, cada um evoluindo independentemente. O sinal soma é adicionado, aditivamente, no oscilador receptor. Apresentaremos a seguir os detalhes desse acoplamento com o sinal soma, inicialmente, com resultados numéricos e no próximo capítulo a sua realização experimental.

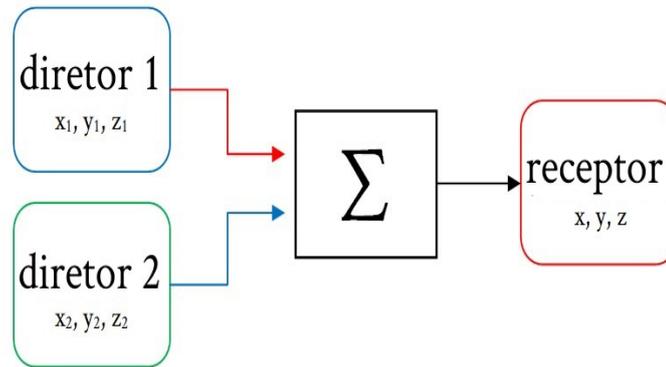
O objetivo inicial para usar uma configuração de acoplamento com mais de um diretor, era analisar a competição entre dois osciladores *diretores* distintos, ambos acoplados ao oscilador receptor. A ideia era criar uma competição entre os sinais dos dois diretores que, eventualmente, estariam em regimes diferentes. A diferença dinâmica de cada diretor se daria por meio de filtros de frequência e/ou atraso entre os sinais. Uma motivação seria a observação de estados do tipo quimera, onde o oscilador receptor pudesse coexistir entre dois regimes diferentes. Enquanto realizávamos testes numéricos com dois diretores, chegamos aos resultados que compõe este capítulo. Resultados estes, a princípio contraintuitivos, pelo quais nos debruçamos para investigá-los sistematicamente. Porém, mostramos que essa sincronização com a soma de vários osciladores é possível. Posteriormente, nós realizamos os experimentos que confirmaram os resultados numéricos.

Embora seja intuitivo que osciladores lineares podem oscilar forçados por uma superposição de outros sinais lineares semelhantes, e isso não seja diferente para o caso dos osciladores não-lineares operando em regime linear, porém, dado as características não-lineares das equações de sistemas com dinâmica caótica, como discutimos nos capítulos anteriores, seria contraintuitivo que um oscilador caótico sincronizasse com um sinal composto pelo somatório linear de outros sinais caóticos. No entanto, nossos estudos demonstraram que essa sincronização é possível.

Para demonstrar a sincronização de um oscilador com uma superposição de sinais caóticos, vamos considerar, inicialmente, três osciladores do sistema G-B, operando em regime caótico. Inicialmente tomamos dois osciladores como diretores e um terceiro como receptor. Cada oscilador individualmente é descrito pelas Eq. (4.6), mas precisaremos reescrever as equações do receptor para considerar o acoplamento aditivo, como representado no esquema da Fig. (40). Nessa configuração não existe interação entre os diretores e eles não recebem realimentação do receptor.

A análise dessa sincronização será feita como realizado no capítulo anterior, para o caso do acoplamento entre dois osciladores (Capítulo 4). Ou seja, vamos calcular numericamente as séries temporais e obter gráficos do retrato de fase. Calcularemos, também, a distância escalar entre as trajetórias,  $|x_{\perp}|$ . Analisaremos as medidas máximas,  $|x_{\perp}|_{max}$ , e médias,  $|x_{\perp}|_{rms}$ . Esses dados serão obtidos observando as variáveis do receptor em relação as variáveis dos dois diretores, separadamente, e do sinal soma.

Figura 40 – Diagrama esquemático simplificado do acoplamento entre os três osciladores caóticos.



Fonte: Autor

Para escrevermos as equações para acoplamento como mais de um diretor, vamos adotar uma notação mais geral, que para as variáveis do sistema G-B são substituídas por:  $x = V_1$ ;  $y = V_2$ ; e  $z = I$ . Essa nomeação das variáveis simplifica a generalização, quando expandirmos para uma quantidade maior de diretores. Escrevemos o conjunto de nove equações para a configuração de acoplamento proposta:

Osciladores diretores:

$$\dot{x}_i = \frac{x_i}{R_1} - g[x_i - y_i] \quad (5.1a)$$

$$\dot{y}_i = g[x_i - y_i] - z_i \quad (5.1b)$$

$$\dot{z}_i = y_i - z_i R_3, \quad (5.1c)$$

onde  $i = 1, 2$ .

Oscilador receptor:

$$\dot{x} = \frac{x}{R_1} - g[x - y] + K_{11}\{[c_1(x_1 - x)] + [c_2(x_2 - x)]\} \quad (5.2a)$$

$$\dot{y} = g[x - y] - z + K_{22}\{[c_1(y_1 - y)] + [c_2(y_2 - y)]\} \quad (5.2b)$$

$$\dot{z} = y - zR_3 + K_{33}\{[c_1(z_1 - z)] + [c_2(z_2 - z)]\}, \quad (5.2c)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de acoplamento, onde consideramos apenas os termos da diagonal,  $[K_{11}, K_{22}, K_{33}]$  e  $c_1, c_2$  são as constantes para se ajustar o nível de acoplamento de cada oscilador diretor. Os valores dos parâmetros de cada oscilador foram escolhidos para que estivessem na margem de 1% de diferença entre eles, veja a Tabela 1.

Tabela 1 – Valores dos parâmetros dos osciladores

Osciladores	Parâmetros		
	$R_1$	$R_2$	$R_3$
diretor 1	1.300	3.440	0.193
diretor 2	1.310	3.465	0.194
receptor	1.313	3.475	0.195

Vamos definir sinal soma das variáveis dos osciladores diretores como:

$$x_s = (x_1 + x_2)/2 \quad (5.3a)$$

$$y_s = (y_1 + y_2)/2 \quad (5.3b)$$

$$z_s = (z_1 + z_2)/2, \quad (5.3c)$$

Também reescrevemos a equação do  $|x_\perp|$ , para medir a distância escalar das trajetórias entre cada um dos diretores e o receptor, assim como do sinal soma em relação ao receptor:

$$|x_\perp|_i = |x_i - x| + |y_i - y| + |z_i - z|, \quad (5.4)$$

onde  $i = 1, 2$  e

$$|x_\perp|_s = |x_s - x| + |y_s - y| + |z_s - z|, \quad (5.5)$$

onde  $x_s, y_s, z_s$  estão definidas nas Eq. (5.3).

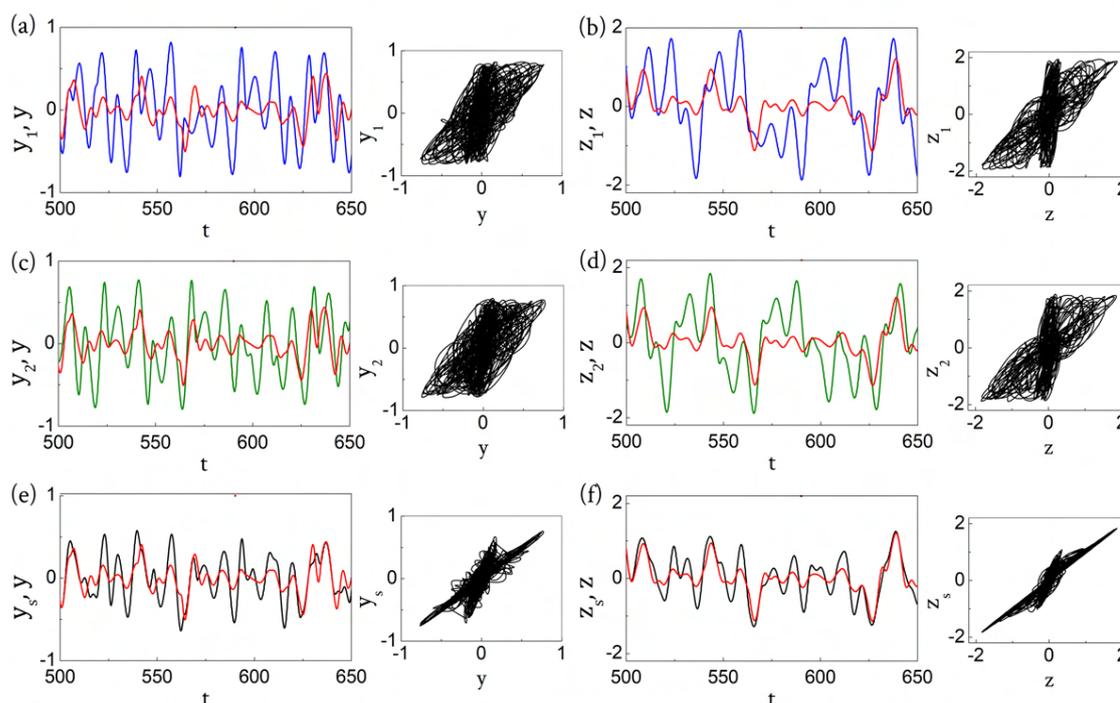
Estabelecidas as condições e determinadas as equações, vamos analisar os acoplamentos em três situações, apresentadas nas seções: (1) Acoplamento com  $K_{11} = 1.0$  e  $K_{22} = K_{33} = 0.0$ , acoplando com as variáveis  $x's$ ; (2) Acoplamento com  $K_{22} = 1.0$  e  $K_{11} = K_{33} = 0.0$ , acoplando com as variáveis  $y's$ ; e (3) Acoplamento simultâneo em duas variáveis, ou seja,  $K_{11} = K_{22} = 1.0$  e  $K_{33} = 0.0$ , acoplando ambos as variáveis  $x's$  e  $y's$ . Em seguida vamos generalizar para um número maior de osciladores diretores, usando o acoplamento  $K_{11} = K_{22} = 1.0$ . Em todas as situações  $K_{ij} = 0.0$ , para  $i \neq j$ .

## 5.1 ACOPLAMENTO VIA $V_1$

Vamos iniciar considerando o acoplamento  $K_{22} = K_{33} = 0$ ,  $K_{11} = 1.0$  e os níveis de acoplamento  $c_1 = c_2 = 4.0$ . Resolvemos numericamente as Eq. (5.1) e Eq. (5.2) para essas condições e analisamos a sincronização das três variáveis do receptor. As Fig. (41) mostram claramente que não há sincronismo dessas variáveis com nenhum dos diretores individualmente, Fig. (41a-d), tanto na série temporal, quanto no retato de fase. No entanto, as séries temporais das Fig. (41e,f) revelam uma forte tendência de

sincronização do receptor com o sinal soma dos dois diretores, mesmo quando existe uma pequena diferença na amplitude dos sinais. Os retratos de fase das variáveis  $y \times y_s$  e  $z \times z_s$  apresentam duas “curvas” assintóticas no mesmo plano. A primeira curva concentra-se na diagonal tendendo a uma reta, o que explica o receptor estar acompanhando o sinal soma nas séries temporais e a segunda “curva”, tem uma inclinação angular em relação a primeira curva. Possivelmente, esta diferença de inclinação na segunda “curva” é devido a uma diferença de amplitude entre os dois sinais. Note que o ângulo de inclinação é relativamente bem definido, o que indica uma correlação entre as amplitudes.

Figura 41 – Séries temporais e retratos de fases das variáveis  $y_{1,2,s}$ ,  $y$ ,  $z_{1,2,s}$  e  $z$ : Correlação das variáveis do receptor, linha vermelha, com (a), (b) oscilador diretor 1, linha azul; (c), (d) oscilador diretor 2, linha verde; e (e), (f) sinal soma, linha preta.

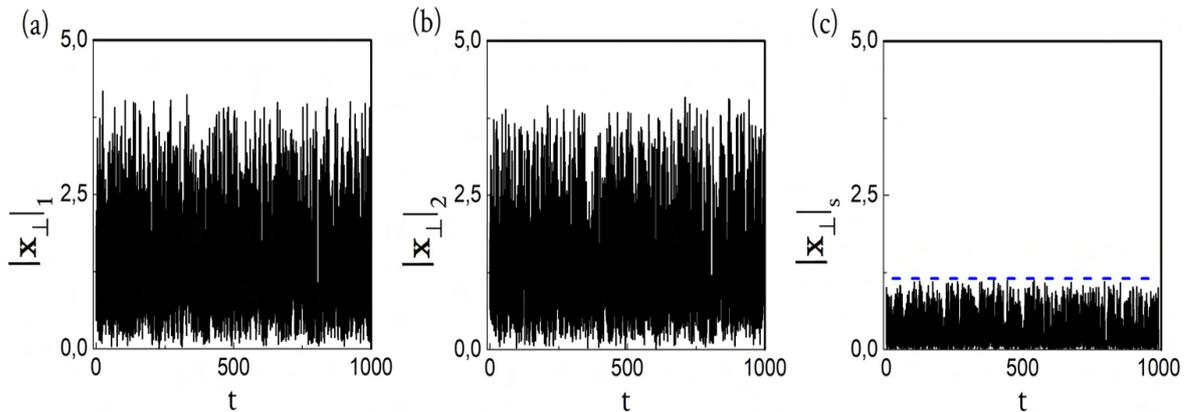


Fonte: Autor

Calculamos também, numericamente, a distância escalar entre as trajetórias dos diretores e do receptor utilizando as Eq. (5.4) e Eq. (5.5). Os resultados estão apresentados nas Fig. (42). Nós vimos no Capítulo 4 que o acoplamento por  $x$  ( $V_1$ ), onde observamos sincronização completa, a medida  $|x_{\perp}|$  tende fortemente a zero em função do nível de acoplamento. Para o acoplamento em estudo aqui, com dois diretores, não é diferente, porém, não na mesma medida. As Fig. (42a,b) confirmam a dessincronização com as variáveis individuais dos diretores e a Fig. (42c) mostra a medida  $|x_{\perp}|_s$  que se aproxima parcialmente de zero, com amplitude menor do que 1.15 (linha azul tracejada). Esse resultado ratifica que o oscilador receptor está parcialmente

sincronizado com o sinal soma, indicando uma tendência para o estado de sincronismo completo.

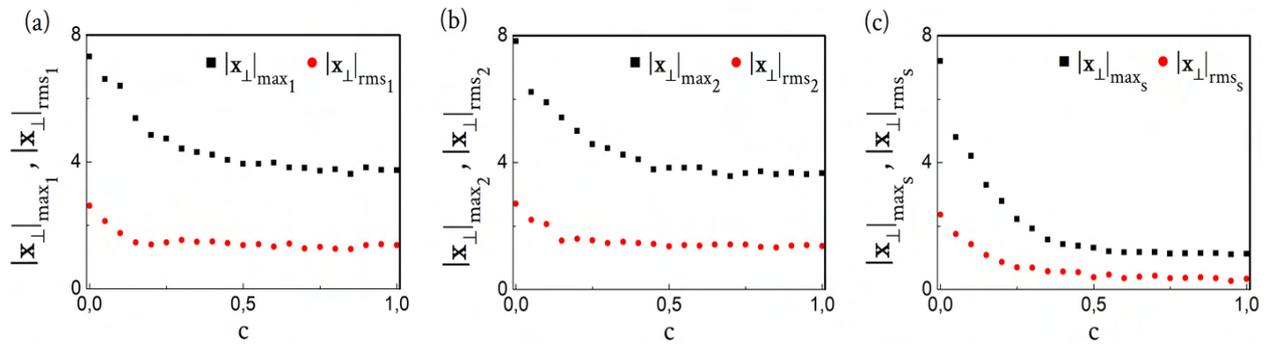
Figura 42 – Série temporal: (a)  $|x_{\perp}|_1$ ; (b)  $|x_{\perp}|_2$ ; e (c)  $|x_{\perp}|_s$ .



Fonte: Autor

As Fig. (43) mostram as medidas máximas e médias das distâncias escalares calculadas anteriormente, em função do nível de acoplamento, com  $c_1 = c_2$  variando de 0.0 a 1.0. Os valores de  $|x_{\perp}|_{max_1}$ ,  $|x_{\perp}|_{rms_1}$ ,  $|x_{\perp}|_{max_2}$  e  $|x_{\perp}|_{rms_2}$  oscilam levemente e conforme o valor de  $c_1$  cresce, as medidas tendem para valores constantes, que tendem para um valor assintótico, diferente de zero. Para as medidas máxima e média do receptor com o sinal soma,  $|x_{\perp}|_{max_s}$  e  $|x_{\perp}|_{rms_s}$ , respectivamente, notamos que as soluções decaem mais rápido se aproximando de zero. No entanto, não alcançam um valor nulo. Esse resultado parece se comportar como as mesmas medidas calculadas no Capítulo 4, Fig. (36), onde usamos a configuração de acoplamento diretor-receptor por meio da variável  $V_2$ , resultando no sincronismo intermetente. Porém, naquele caso a medida média praticamente zero, enquanto que a medida máxima tende para valores diferentes de zero. A diferença entre medidas calculadas nesta seção, Fig. (43), com o caso do Capítulo 4, é que tanto  $|x_{\perp}|_{max_s}$  quanto  $|x_{\perp}|_{rms_s}$  não aproximam de zero. Esse resultado descarta a possibilidade de interpretarmos como uma provável sincronização intermetente.

Figura 43 – (a)  $|x_{\perp}|_1$ ; (b)  $|x_{\perp}|_2$ ; e (c)  $|x_{\perp}|_s$  em função do nível de acoplamento  $c = c_1 = c_2$  variando de 0.0 a 1.0.



Fonte: Autor

Até aqui nós analisamos o caso em que os valores de  $c_1$  e  $c_2$  são iguais. A seguir verificaremos o comportamento desse acoplamento para  $c_1 \neq c_2$ . Para isso, fixamos o valor de  $c_1 = 4.0$  e variamos  $c_2$ , para o qual escolhemos os seguintes valores: (0.0, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0). Resolvemos numericamente as Eq. (5.1) e Eq. (5.2) e apresentamos as soluções nas Fig. (45). Como esperado para  $c_2 = 0.0$ , o oscilador receptor sincroniza com o diretor 1 ( $c_1 = 4.0$ ), como mostrado nas Fig. (45a-c), já que não existe acoplamento com o diretor 2. Porém, conforme aumentamos o valor de  $c_2$ , o receptor vai diminuindo sua correlação com diretor 1 e mantém-se dessincronizado com o diretor 2. No entanto, aumenta a correlação com o sinal soma,  $y_s$ . Esse resultado nos permite entender que a diferença no nível de acoplamento, de cada oscilador, conduz o receptor a sincronizar com aquele que possui o maior acoplamento e ao passo que os níveis se igualam sincroniza com o sinal soma. Dessa forma, nos próximos resultados utilizaremos  $c_1 = c_2$ , posto que um desbalanço de acoplamento com os diretores não leva a resultados particularmente interessantes.

Na próxima seção, iremos analisar o caso para  $K_{22} = 1.0$ . Lembrando que no capítulo anterior com um único diretor, o acoplamento por  $y$  ( $V_2$ ) resulta em sincronização intermetente.

Figura 44 – Sistema G-B com  $c_1 = 4.0$ , fixo, e variamos  $c_2: y \times y_i$ . Na esquerda,  $i = 1$ ; centro,  $i = 2$ ; direita,  $i = s$ . (a)  $c_2 = 0.0$ , (b)  $c_2 = 0.5$ , (c)  $c_2 = 1.0$ , (d)  $c_2 = 2.0$  e (e)  $c_2 = 3.0$

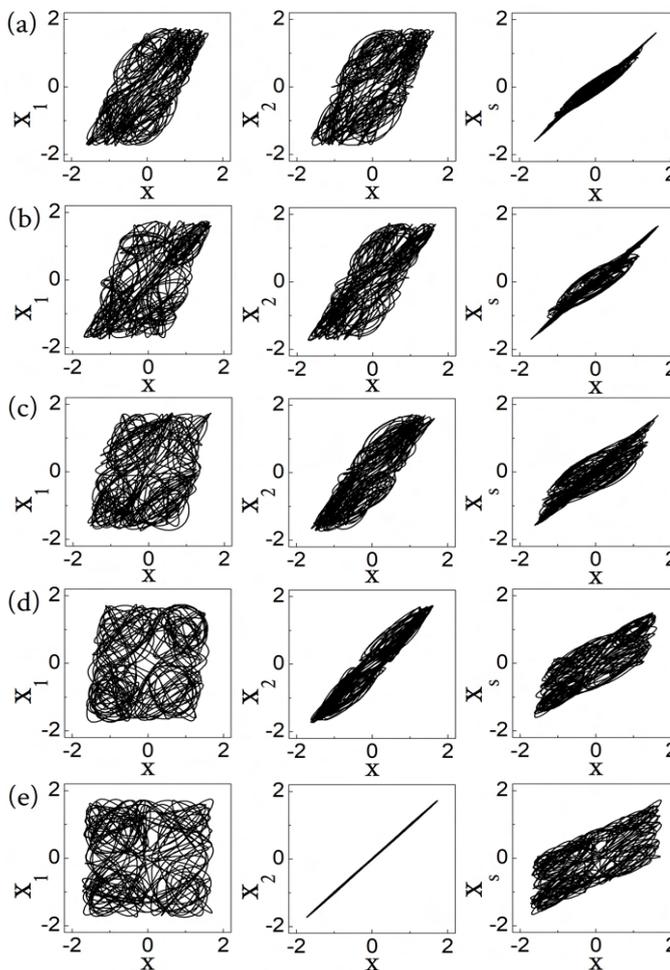


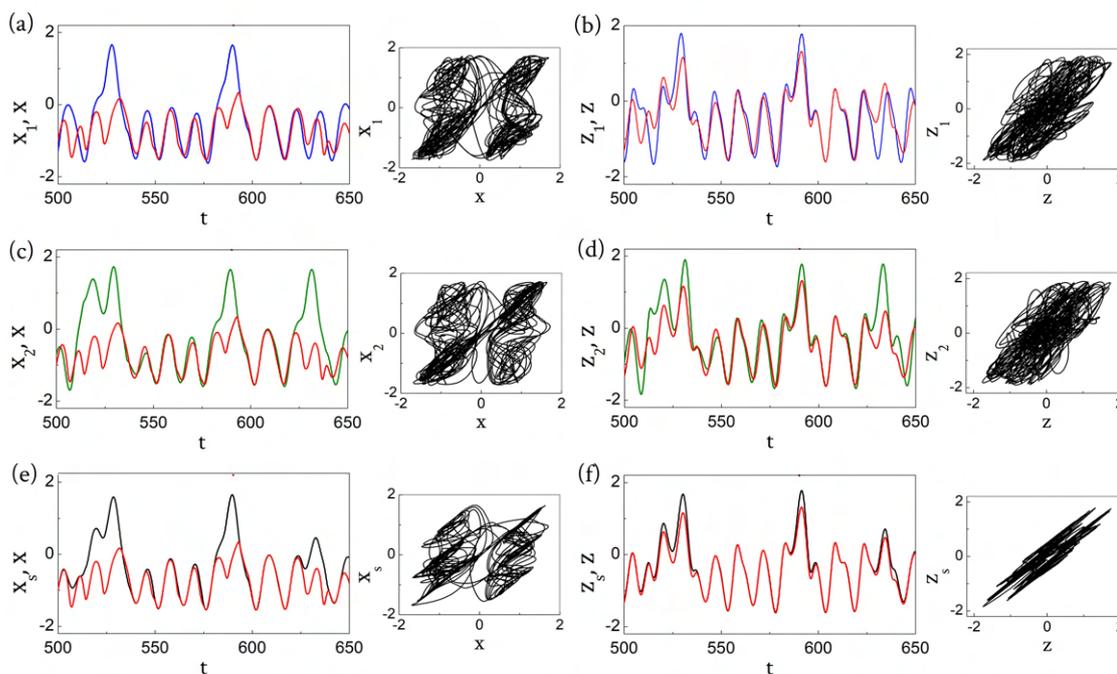
Figura 45 – (a)  $|x_{\perp}|_1$ ; (b)  $|x_{\perp}|_2$ ; e (c)  $|x_{\perp}|_s$  em função do nível de acoplamento  $c = c_1 = c_2$  variando de 0.0 a 1.0.

## 5.2 ACOPLAMENTO VIA $V_2$

Analisamos na seção (5.1) o acoplamento por meio das variáveis  $x's$ . Agora analisaremos, nesta seção, o acoplamento em  $y$  ( $V_2$ ), isto é, para  $K_{22} = 1.0$ ,  $K_{11} = K_{33} = 0$ , e usando  $c_1 = c_2 = 4.0$ . Calculando numericamente as Eq. (5.1) e (5.2) obtivemos os resultados apresentados nas Fig. (46). Nós vimos na seção anterior (5.1) que o oscilador receptor tem ‘preferência’ em seguir o sinal soma. No acoplamento via  $V_2$ , essa ‘preferência’ não é diferente. As séries temporais das variáveis  $x_{1,2}$ ,  $x$ ,  $z_{1,2}$  e  $z$ , nas Fig. (46a-d), nos mostram a desconexão dos osciladores diretores com o receptor, individualmente, com regiões de grandes divergências de amplitude. Os retratos de fase das mesmas variáveis,  $x_{1,2} \times x$  e  $z_{1,2} \times z$ , ratifica essa desconexão a medida que as trajetórias não convergem para a formação de uma reta na diagonal. Note que essa divergência da reta com as variáveis  $x_{1,2} \times x$ , se comporta semelhantemente como no

retrato de fase das variáveis  $V_{1d} \times V_{1r}$ , Fig. (35b,d), na configuração de acoplamento diretor-receptor. Uma maior convergência é observada com o sinal soma, Fig. (46e,f). Mesmo nas regiões da série temporal de  $x_s$  e  $x$ , onde ocorre uma grande diferença de amplitude, o receptor continua a acompanhar o sinal soma, Fig. (46e). Essa grande diferença na amplitude não possibilita a formação de uma possível reta na diagonal. Porém, não é o que ocorre com as variáveis  $z_s$  e  $z$ , Fig. (46f). Devido a essa diferença de amplitude ser muito menor, observamos uma formação mais nítida de uma reta. Ou seja, confirmando a ‘preferência’ do oscilador receptor em correlacionar com o sinal soma.

Figura 46 – Séries temporais e retratos de fase, com  $K_{22} = 1.0$  e  $c_1 = c_2 = 4.0$ , das variáveis  $x_{1,2,s}$ ,  $x$ ,  $z_{1,2,s}$  e  $z$ : (a), (b) diretor 1, linha azul, e receptor, linha vermelha; (c), (d) diretor 2, linha verde, e receptor; e (e), (f) sinal soma, linha preta, e receptor.

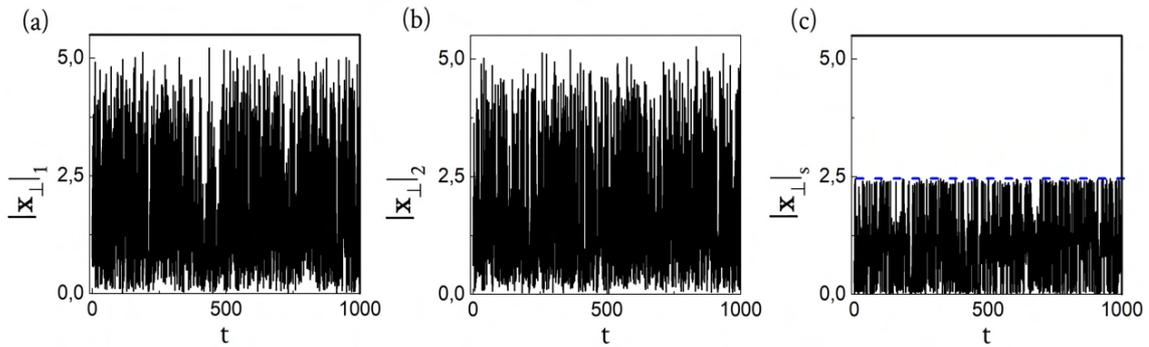


Fonte: Autor

No Capítulo 4, nós observamos um comportamento de breves desconexões, o qual definimos como eventos de dessincronização, sucedentes do acoplamento por de  $V_2$  na configuração diretor-receptor. Esses eventos podem ser observados nas séries temporais da distância escalar da Fig. (32). Mediante esse comportamento apresentado por meio de  $V_2$ , nós também investigamos se esses eventos de dessincronismo poderiam ser observados no acoplamento que estamos explorando neste capítulo. Para isso, calculamos as distâncias escalares entre os osciladores diretores, individualmente, e receptor e entre o sinal soma e receptor,  $|x_{\perp}|_{1,2}$  e  $|x_{\perp}|_s$ , respectivamente. As Fig. (5.8) mostram os resultados das soluções numéricas. Como esperado, as amplitudes de  $|x_{\perp}|_{1,2}$ , Fig. (5.8a,b), são máximas devido a desconexão. A série temporal do  $|x_{\perp}|_s$ ,

Fig. (47c), apresenta amplitudes máximas menor do que 2.45 (linha azul tracejada), com o comportamento que se assemelha aos casos de decorrelação. Logo,  $|x_{\perp}|_s$  não apresenta resultados comparáveis com a série temporal do  $|x_{\perp}|$ , Fig. (32), do Capítulo 4, o qual já mencionamos anteriormente.

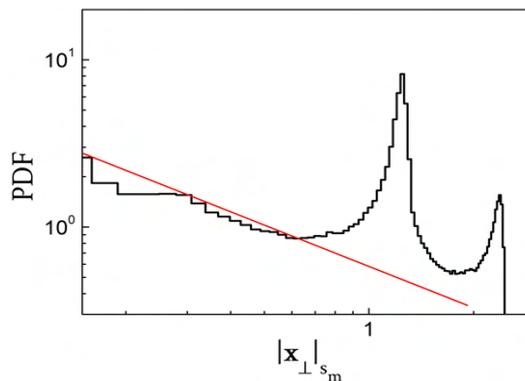
Figura 47 – Série temporal das distâncias escalares: (a)  $|x_{\perp}|_1$ ; (b)  $|x_{\perp}|_2$ ; e (c)  $|x_{\perp}|_s$ .



Fonte: Autor

Nós calculamos o histograma dos máximos locais ( $|x_{\perp}|_{s_m}$ ) do  $|x_{\perp}|_s$  e a distribuição de probabilidade (*PDF*) para verificarmos o comportamento da distribuição. Apresentamos o PDF na Fig. (48). O histograma apresenta eventos extremos de amplitude muito maior do que o evento observado no histograma do  $|x_{\perp}|$  (Capítulo 4, subseção (4.2.3)) apresentado na Fig. (37). Dado a série temporal do  $|x_{\perp}|_s$  se comportar semelhantemente com  $|x_{\perp}|_{1,2}$ , não esperávamos a ocorrência desses eventos. Além disso, há um segundo pico de eventos cuja amplitude é menor do que o primeiro. Observamos que a presença dos dois picos simultâneos ocorreu quando acoplamos o sinal soma dos dois osciladores diretores que foram adicionados no receptor, pois, como vimos, no acoplamento com apenas um diretor, o histograma do  $|x_{\perp}|$  apresenta apenas um pico, Fig. (32).

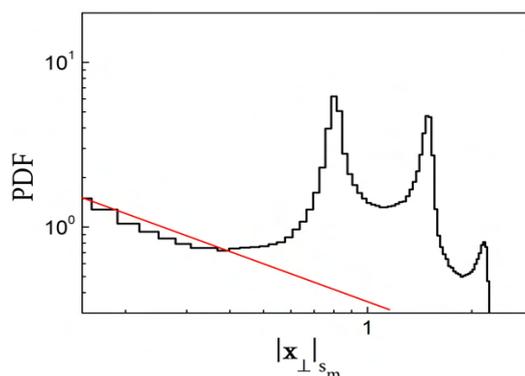
Figura 48 – Histograma dos máximos locais do  $|x_{\perp}|_s$  com  $c_1 = c_2 = 4.0$  e 1% de diferença entre os parâmetros dos osciladores.



Fonte: Autor

Mediante a presença do dois picos de eventos no histograma da Fig. (48), nós verificamos se um terceiro pico poderia surgir no acoplamento com três osciladores diretores, adicionados no receptor, e o resultado foi que com três diretores, o histograma apresenta três picos de eventos, conforme está apresentado na Fig. (49).

Figura 49 – Histograma dos máximos locais do  $|x_{\perp}|_s$  do acoplamento com três osciladores diretores, onde os níveis de acoplamento  $c_1 = c_2 = c_3 = 4.0$  e 1% de diferença entre os parâmetros dos osciladores.



Fonte: Autor

Verificamos até aqui, dois casos de acoplamento de dois diretores com um oscilador, em que ora só acoplamos com  $K_{11} = 1.0$  (seção 5.1), ora só  $K_{22} = 1.0$  (nesta seção). Na próxima seção, apresentaremos resultados obtidos com acoplamento utilizando duas variáveis de cada um dos diretores. Fazemos então  $K_{11} = K_{22} = 1.0$ . Ou seja, o acoplamento em  $x$  e  $y$  são acionados simultaneamente nas Eq. (5.2a,b).

### 5.3 ACOPLAMENTO SIMULTÂNEO, $V_1$ E $V_2$

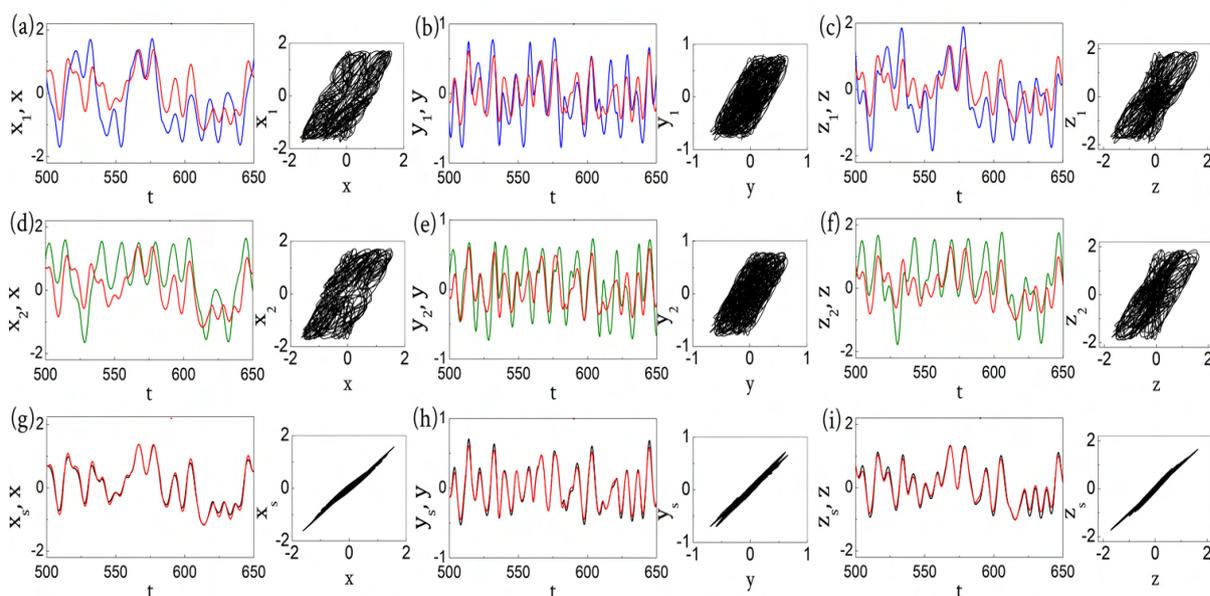
Nesta seção vamos estudar a configuração em que acionamos simultaneamente o acoplamento em  $x$  e  $y$ , com  $K_{11} = K_{22} = 1.0$ ,  $K_{33} = 0$  e com os níveis de acoplamento  $c_1 = c_2 = 2.0$ . Dividiremos esta seção em duas subseções: (1) iremos explorar esse acoplamento com osciladores em regime caótico; e (2) analisaremos o acoplamento na condição em que os osciladores evoluam em regime periódico.

#### 5.3.1 ACOPLAMENTO COM $K_{11} = K_{22} = 1.0$

Resolvendo as Eq. (5.1) e Eq. (5.2) para a configuração onde os sinais  $V_1$  e  $V_2$  dos diretores são, simultaneamente, somados e adicionados ao oscilador receptor. Obtemos resultados bastante interessantes, que estão apresentados nas Fig. (50). Claramente, o oscilador receptor não tem correlação nem com o oscilador diretor 1 e nem com o diretor 2, como nos mostra as séries temporais e os retratos de fase nas Fig. (50a-f). No entanto, o oscilador receptor sincroniza quase que perfeitamente com o sinal soma, em todas as variáveis. Note uma pequena diferença de amplitude

nas séries temporais das Fig. (50g-i). Essa diferença pode ser também observada nos retratos de fase, Fig. (50g-i). A curva desvia ligeiramente de uma reta na diagonal, que caracteriza a sincronização completa. Esse tipo de sincronização é contraintuitiva e ainda não tinha sido relatada na literatura. Portanto, os resultados aqui apresentados, abrem opções de configuração para investigação da sincronização de sistema caóticos, particularmente em redes.

Figura 50 – Séries temporais, esquerda, e retratos de fase, direita, com  $K_{11} = K_{22} = 1.0$ : (a)-(c) diretor 1, linha azul, e receptor, linha vermelha; (e)-(f) diretor 2, linha verde, e receptor; e (g)-(i) sinal soma, linha preta, e receptor.

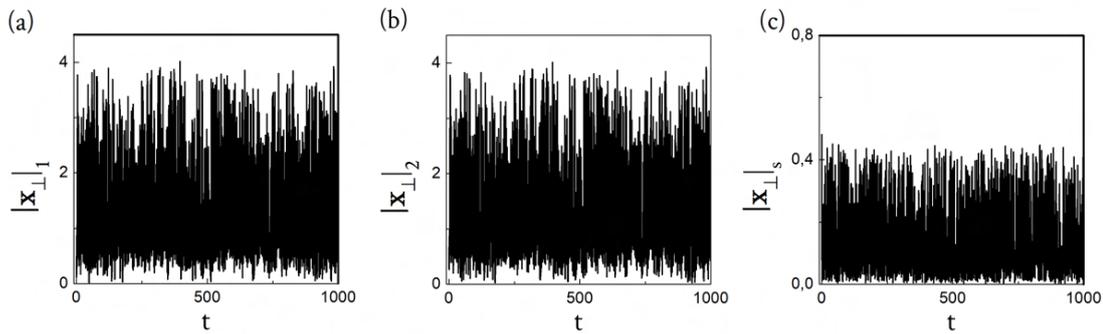


Fonte: Autor

Quantificamos nossa análise para essa sincronização com dois diretores com acoplamento simultâneo, calculando a distância escalar entre as trajetórias dos osciladores, como foi realizado nas seções anteriores. Ou seja, calculamos as distâncias das trajetórias para cada diretor e para o sinal soma, Eq. (5.4) e Eq. (5.5). As Fig. (51a, b, e c) apresentam séries temporais de  $|x_{\perp}|_1$ ,  $|x_{\perp}|_2$  e  $|x_{\perp}|_s$ , respectivamente. Note que a amplitude da medida  $|x_{\perp}|_s$  decresce, mas não vai a zero, Fig (51c). Mesmo que  $|x_{\perp}|_s$  não tenha valores nulos, a sua amplitude máxima é quase dez vezes menor do que as amplitudes das distâncias entre os diretores e o receptor,  $|x_{\perp}|_1$  e  $|x_{\perp}|_2$ , Fig (51a,b). Porém, os valores são suficientes para que possa ser identificada uma sincronização entre o receptor e o sinal soma.

Com a convergência entre o receptor e o sinal soma apresentada claramente nas séries temporais das variáveis e da distância escalar, nós avaliamos essa convergência calculando as medidas máxima,  $|x_{\perp}|_{max_s}$ , e média,  $|x_{\perp}|_{rms_s}$ , do  $|x_{\perp}|_s$  variando o níveis de acoplamento,  $c_1 = c_2$ , entre 0.0 e 1.0. Apresentamos a solução dessas medidas na Fig. (52), a qual nos mostra que  $|x_{\perp}|_{max_s}$  e  $|x_{\perp}|_{rms_s}$  decaem rapidamente, conforme

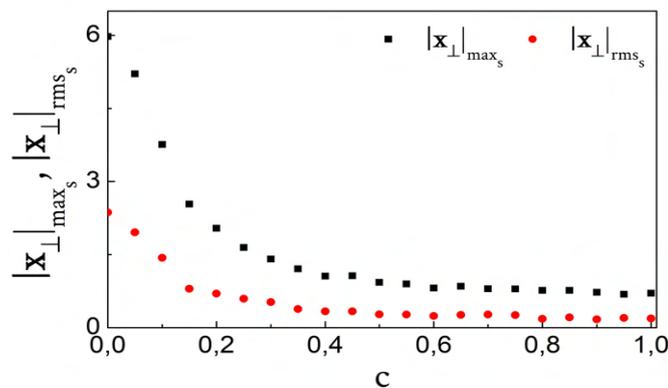
Figura 51 – Série temporal das distâncias escalares: (a)  $|x_{\perp}|_1$ ; (b)  $|x_{\perp}|_2$ ; e (c)  $|x_{\perp}|_s$ .



Fonte: Autor

os níveis de acoplamento crescem. Enquanto a medida  $|x_{\perp}|_{rms_s}$  apresenta valores muito próximos de zero, o  $|x_{\perp}|_{max_s}$  tendem para valores constantes não nulos. Isso significa que a correlação não é completa. Para que ocorra uma correção completa, tanto a medida média quanto a máxima precisam ser nulas ou muito próximas de zero. Exatamente como foi observado no acoplamento via  $V_1$ , na configuração diretor-receptor, Fig. (33).

Figura 52 – Gráfico dos  $|x_{\perp}|_{max_s}$ , quadrado preto, e  $|x_{\perp}|_{rms_s}$ , círculo vermelho, em função dos níveis de acoplamento,  $c_1 = c_2 = c$ , variando entre 0.0 e 1.0.

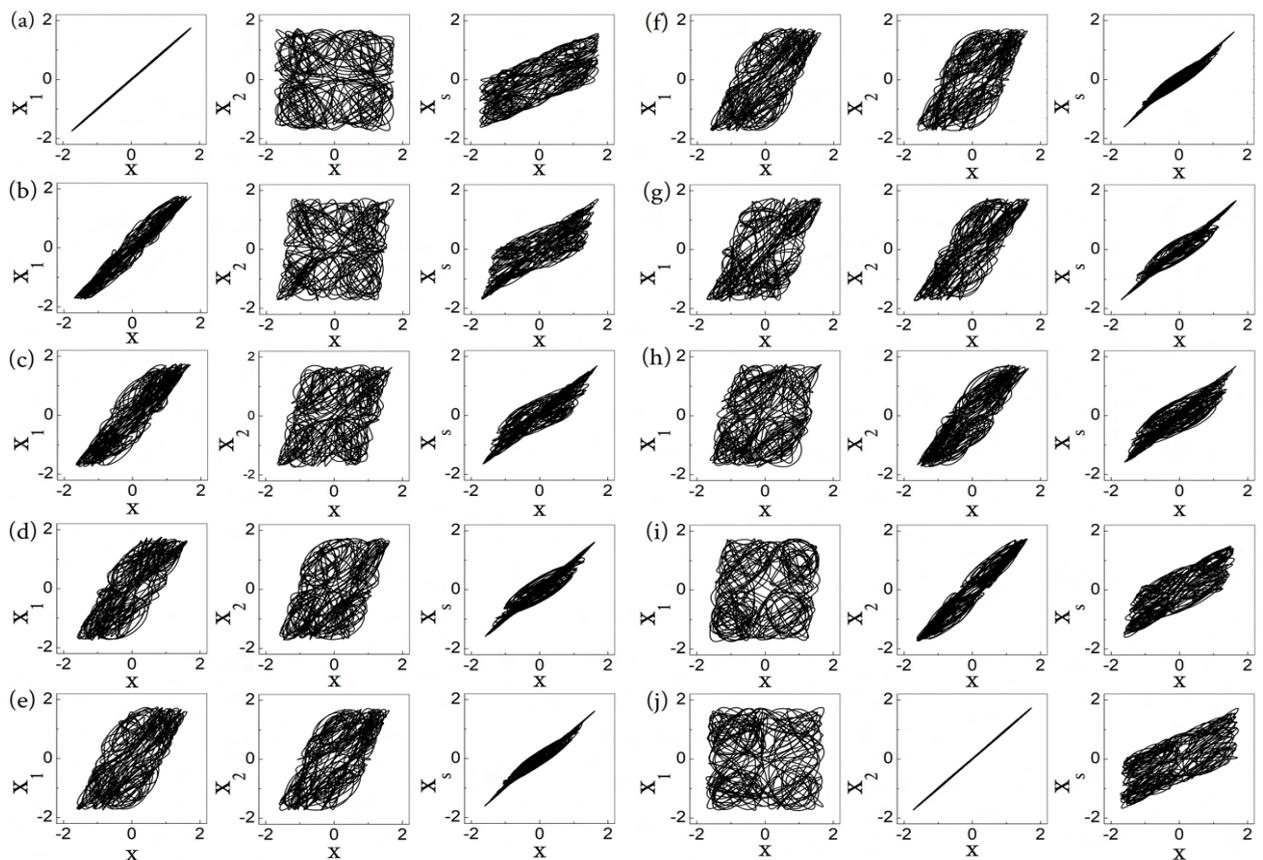


Fonte: Autor

Para esse acoplamento simultâneo com  $x$  e  $y$ , analisamos o comportamento da sincronização com a variação do nível de acoplamento. Inicialmente, escolhemos fixar o valor de  $c_1 = 1.0$  e variamos  $c_2$  de 0.0 a 1.0. Para verificar a coerência dos resultados, também calculamos o caso em que foi mantido fixo  $c_2 = 1.0$  e variamos  $c_1$  de 1.0 a 0.0. Os resultados numéricos estão apresentados nos retratos de fase,  $x \times x_{1,2,s}$ , mostrado nas Fig. (53). Note que partindo de  $c_2 = 0.0$ , Fig. (53a), o oscilador receptor correlaciona apenas com o diretor 1, como esperado. Conforme o valor de  $c_2$  cresce, o receptor correlaciona com o sinal soma, Fig.(53b-e). O mesmo ocorre quando variamos  $c_1$  decrescentemente, Fig. (53f-j). O receptor perde sua convergência com sinal soma e

passa a correlacionar com o diretor 2. No geral, esses resultados nos mostra que se  $c_1 \neq c_2 \neq 0$ , aquele que tem o menor nível de acoplamento atua como uma espécie de perturbação, interferindo na sincronização do outro. Portanto, só observamos a sincronização com o sinal soma quando as níveis de acoplamento de cada diretor são iguais.

Figura 53 – Sistema G-B. Na esquerda,  $i = 1$ ; centro,  $i = 2$ ; direita,  $i = s$ . Com  $c_1 = 1.0$ , fixo, e variamos  $c_2: x \times x_i$  (a)  $c_2 = 0.0$ , (b)  $c_2 = 0.25$ , (c)  $c_2 = 0.50$ , (d)  $c_2 = 0.75$ , (e)  $c_2 = 1.0$ . Com  $c_2 = 1.0$ , fixo, e variamos  $c_1$ : (f)  $c_1 = 0.0$ , (g)  $c_1 = 0.25$ , (h)  $c_1 = 0.50$ , (i)  $c_1 = 0.75$ , (j)  $c_1 = 1.0$



Fonte: Autor

Temos explorado o acoplamento simultâneo com  $x$  e  $y$  e os três osciladores utilizados com os parâmetros ajustados para evoluírem em regime caótico. Buscamos investigar, na mesma configuração de acoplamento, a sincronização no caso que os parâmetro são reajustados para que os três osciladores evoluam em regime periódico. Trataremos a respeito disso na próxima subseção.

### 5.3.2 ACOPLAMENTO COM OS OSCILADORES EM REGIME PERIÓDICO

Na subseção (5.3.1) mostramos os resultados do acoplamento de dois osciladores a um terceiro, para o sistema G-B, onde todos estão em regime caótico e

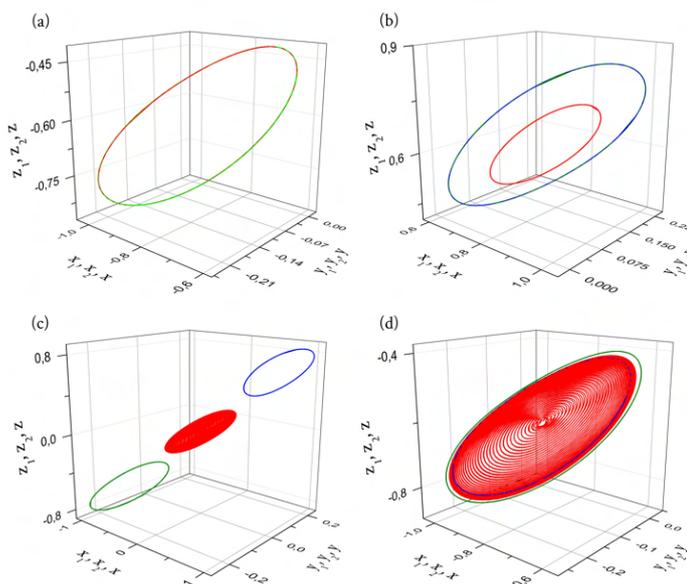
analisamos o nível de sincronismo resultante desse acoplamento. Nesta subseção, nós iremos analisar a mesma configuração com duas variáveis, porém, com todos os osciladores em regime periódico.

Para realizarmos o acoplamento descrito acima, ajustamos os valores adimensionais dos parâmetros dos três osciladores e verificamos esse acoplamento em três casos distintos: (1) parâmetros iguais ( $R_1 = 1.30$ ,  $R_2 = 1.30$ ,  $R_3 = 0.19$ ) e condições iniciais iguais; (2) parâmetros iguais ( $R_1 = 1.30$ ,  $R_2 = 1.30$ ,  $R_3 = 0.19$ ) e condições iniciais diferentes; (3) parâmetros ligeiramente diferentes (diretor 1:  $R_1 = 1.30$ ,  $R_2 = 1.30$ ,  $R_3 = 0.19$ ; diretor 2:  $R_1 = 1.2890$ ,  $R_2 = 1.2900$ ,  $R_3 = 0.1889$ ; receptor:  $R_1 = 1.2880$ ,  $R_2 = 1.2870$ ,  $R_3 = 0.1887$ ) e condições iniciais diferentes.

As soluções numéricas das Eq. (5.1) e Eq. (5.2), com os parâmetros acima definidos, estão apresentadas nas Fig. (54), que nos mostra as trajetórias dos três osciladores. Note que o resultado do primeiro caso exhibe as trajetórias dos três osciladores sobrepostas, Fig. (54a). Esse resultado era esperado devido as condições iniciais e parâmetros serem iguais para os três osciladores, ou seja, as soluções são iguais. Para o segundo caso, Fig. (54b), temos um resultado que embora tenha os mesmos valores para os parâmetros, diferentemente do anterior, tem condições iniciais diferentes. O interessante desse resultado é que o receptor não tem trajetórias na mesma região em que os diretores oscilam. Ele ocupa quase que o centro do espaço de estado, indicando uma composição regular (amplitude e fase) das trajetórias dos diretores. Esse comportamento, semelhantemente, se reproduz no terceiro caso, Fig. (54c), onde os parâmetros e as condições iniciais, de cada um dos osciladores, são diferentes. Nesse caso em particular, a solução de cada diretor ocupa regiões opostas à região central. Essas soluções indicam que ambos oscilam no espaço de estado com pontos fixos diferentes e soma deles está conduzindo o receptor a oscilar, mais uma vez, em uma região entre as duas soluções dos diretores, que neste caso, próximo do centro.

A Fig. (54d) também é solução do terceiro caso, o que difere da Fig. (54c) são apenas as condições iniciais, ou seja, o terceiro caso pode apresentar duas soluções distintas dependendo de onde ela inicializa. Nesta situação, os osciladores diretores parecem ter soluções em torno de pontos fixos próximos. Embora eles tenham uma única órbita, o receptor apresenta diversas órbitas, mudando sempre que passa próximo da origem.

Figura 54 – Trajetórias dos três osciladores *diretor 1* (linha azul), *diretor 2* (linha verde) e *receptor* (linha vermelha): (a) caso 1, com  $R_1 = 1.3000$ ,  $R_2 = 1.3000$ ,  $R_3 = 0.1900$ ; (b) caso 2, parâmetros iguais ao do item (a); (c) e (d) caso 3, com  $R_1 = 1.3000, 1.2890, 1.2880$ ,  $R_2 = 1.3000, 1.290, 1.287$  e  $R_3 = 0.1900, 0.1889, 0.1887$ .



Fonte: Autor

Na próxima seção, nós iremos generalizar a configuração de acoplamento, representada pelo diagrama esquemático da Fig. (40), o qual nós exploramos com dois osciladores diretores acoplados, por meio das variáveis  $x$  e  $y$  simultaneamente, no oscilador receptor para um número maior de diretores. Também demonstraremos que a convergência do receptor com o sinal soma melhora a medida que aumentamos o número de diretores.

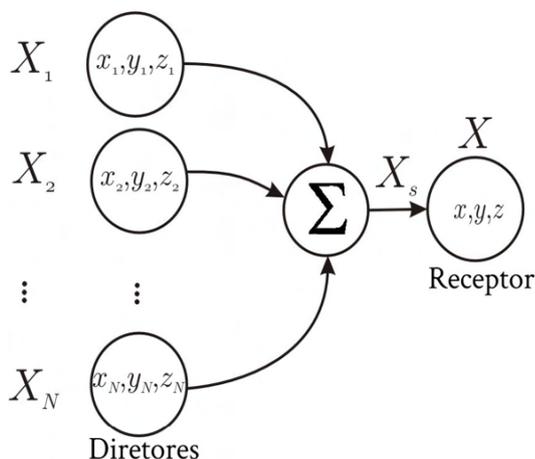
#### 5.4 ACOPLAMENTO NA SOMA DE N OSCILADORES

Nós estudamos na seção anterior o caso do acoplamento de dois osciladores diretores em um oscilador receptor. Demonstramos que, quando a informação dos diretores é transmitida através de duas variáveis que são acopladas, a sincronização é bem mais efetiva. Nesta seção vamos expandir nossos resultados e demonstrar, teoricamente e numericamente, que o sincronismo melhora conforme aumentamos o número de diretores. Este comportamento pode ser observado também no sistema de Lorenz.

Para ilustrar o esquema geral do acoplamento para qualquer número de diretores, construímos um diagrama esquemático apresentado na Fig. (55). Aplicamos esse esquema aos sistemas G-B e Lorenz.

A discussão nas subseções a seguir se dividem em: Análise teórica do sin-

Figura 55 – Diagrama esquemático para o acoplamento de um oscilador caótico com o sinal soma de N osciladores diretores.



Fonte: Autor

cronismo com uma superposição de sinais (subseção (5.4.1)), Acoplamento com N osciladores do sistema G-B (subseção (5.4.2)) e sistema de Lorenz (subseção(??)).

#### 5.4.1 ANÁLISE TEÓRICA DO SINCRONISMO DE UM OSCILADOR NÃO-LINEAR COM UMA SUPERPOSIÇÃO DE SINAIS

Os resultados que apresentamos na seção (5.3) são de natureza numérica. Nesta subseção vamos demonstrar que a sincronização com a soma de sinais é possível, ou seja, o oscilador receptor converge para o sinal soma. Podemos escrever matematicamente essa convergência como

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_s = \frac{\sum_{n=1}^N c_n \mathbf{X}_n}{\sum_{n=1}^N c_n}, \quad (5.6)$$

onde  $\mathbf{X}^T = (x, y, z)$ , representando o oscilador receptor,  $\mathbf{X}_s^T = (x_s, y_s, z_s)$  a soma dos sinais de cada oscilador diretor e  $n = 1, 2, \dots, N$  é o número de diretores,  $\mathbf{X}_n^T = (x_n, y_n, z_n)$ .

Para demonstrarmos teoricamente a convergência da Eq. (5.6), consideramos um número N de osciladores diretores, cada qual evoluindo livremente e independentemente, com evolução descrita por:

$$\dot{\mathbf{X}}_n = \mathbf{F}(\mathbf{X}_n), \quad (5.7)$$

onde  $\mathbf{X}_n^T = (x_n, y_n, z_n)$ , com  $n = 1, 2, \dots, N$ , representando cada trajetória particular.  $\mathbf{F}$  é o vetor campo determinando o fluxo do sistema. Para o acoplamento, o sinal de cada um desses diretores é enviado para o receptor, conforme o esquema da Fig. (55). Para

esse esquema de acoplamento aditivo unidirecional, a dinâmica do receptor é descrita por:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{K} \sum_{n=1}^N c_n (\mathbf{X}_n - \mathbf{X}). \quad (5.8)$$

A análise da convergência na solução do receptor para a soma das soluções dos diretores (segunda parte da Eq. (5.8)) é equivalente a estabilidade da sincronização do oscilador receptor no sinal soma. Tal análise será feita através do método de linearização da diferença entre as trajetórias de  $\mathbf{X}_s$  e  $\mathbf{X}$ . Para tanto definimos a variável

$$\Delta \mathbf{X} = \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{X}_n - C \mathbf{X}, \quad (5.9)$$

onde  $C = \sum_{n=1}^N c_n$ . A Eq. (5.9) é deduzida reescrevendo o segundo termo do lado direito da Eq. (5.8), do qual  $\Delta \mathbf{X}^T = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ . Cada variável de  $\Delta \mathbf{X}$  é definida como

$$\Delta x = \sum_{n=1}^N c_n x_n - Cx \quad (5.10a)$$

$$\Delta y = \sum_{n=1}^N c_n y_n - Cy \quad (5.10b)$$

$$\Delta z = \sum_{n=1}^N c_n z_n - Cz. \quad (5.10c)$$

Note que quando  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_s$ , a variável  $\Delta \mathbf{X} \rightarrow 0$ , ou seja, o oscilador receptor sincroniza com a soma dos osciladores diretores. Derivando a Eq. (5.9) em relação ao tempo e utilizando as Eq. (5.7) e Eq. (5.8), obtemos

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \sum c_n \mathbf{F}(\mathbf{X}_n) - C \mathbf{F}(\mathbf{X}) - C \mathbf{K} \Delta \mathbf{X}. \quad (5.11)$$

Expandindo o fluxo  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  em série de Taylor entorno de  $\mathbf{X}_s$  e limitando a expansão até o termo de primeira ordem, teremos  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}(\mathbf{X}_s) + D\mathbf{F}(\mathbf{X}_s)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_s)$ , onde  $D\mathbf{F}(\mathbf{X}_s)$  é matriz Jacobiana de  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ , com  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_s$ . Note que a partir da Eq. (5.9), temos que  $(\mathbf{X} - \mathbf{X}_s) = -\Delta \mathbf{X}/C$ . Substituindo essa expressão na Eq. (5.11) juntamente com o resultado da expansão, obtemos

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \sum c_n \mathbf{F}(\mathbf{X}_n) - C \mathbf{F}(\mathbf{X}_s) + (D\mathbf{F}(\mathbf{X}_s) - C\mathbf{K}) \Delta \mathbf{X}. \quad (5.12)$$

Analizando os dois primeiros termos do lado direito da Eq. (5.12) e considerarmos que

$$\frac{\sum c_n \mathbf{F}(\mathbf{X}_n)}{\sum c_n} \approx \mathbf{F} \left( \frac{\sum_{n=1}^N c_n \mathbf{X}_n}{\sum_{n=1}^N c_n} \right), \quad (5.13)$$

a Eq. (5.12) pode ser simplificada para a equação variacional

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M} \Delta \mathbf{X}, \quad (5.14)$$

com  $\mathbf{M} = [D\mathbf{F}(\mathbf{X}_s) - C\mathbf{K}]$ . A solução dessa equação determina a estabilidade da sincronização. Note que, mesmo quando a aproximação feita na Eq. (5.13) não é completamente satisfeita, ainda assim podemos usar a Eq. (5.14) para caracterizar a estabilidade. Nesse caso, o sistema globalmente sincroniza com um deslocamento entre o sinal do *receptor* e o sinal soma proporcional à diferença entre os termos na Eq. (5.13).

A matriz  $\mathbf{M}$  é a matriz fundamental da equação variacional, cuja solução pode ser obtida determinando os autovalores  $\{\lambda_j\}_{j=0}^2$  de  $\mathbf{M}$  em cada ponto da trajetória  $\mathbf{X}_s$ . A parte real do autovalor do máximo local é o termo dominante da dinâmica em cada ponto. O autovalor do máximo global na trajetória é definido por

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \{\text{Max}_j (\text{Re } \lambda_j(t))\}, \quad (5.15)$$

conhecido, na literatura, como expoente de Lyapunov transversal []. A sincronização é estável com  $\Lambda < 0$  e instável com  $\Lambda > 0$ , quando as trajetórias  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{X}_s$  divergem.

Considerando agora um diferença finita  $\mathbf{d}$  entre os dois lados da Eq. (5.13), podemos escrever, para o autovalor dominante,  $\Gamma$ , da matriz Jacobiana, a equação variacional,

$$\Delta \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{d} + (\Gamma - CN) \Delta \mathbf{X}. \quad (5.16)$$

Usando  $\Lambda = (\Gamma - CN)$  (veja a Eq. (5.15)), a solução da Eq. (5.16) assume a forma

$$\Delta \mathbf{X} = \frac{\mathbf{d}}{\Gamma} + \Delta \mathbf{X}_0 e^{\Gamma t}. \quad (5.17)$$

A condição para que a sincronização ocorra corresponde à  $\Gamma < 0$ , ou seja,

$$\Gamma - cN < 0. \quad (5.18)$$

Como a dependência de  $\Gamma$  em  $N$  é desprezível, o valor crítico,  $c_{cr}$ , de  $c$ , para o qual  $\Gamma - c_{cr}N = 0$ , é inversamente proporcional ao número de osciladores diretores adicionados no acoplamento com o receptor (veja as Fig. (56)). Para grandes valores de  $N$  e um longo tempo, expressamos a contribuição de  $\mathbf{d}$  como uma pequena lei de potência em  $N$  e obtemos

$$|\mathbf{X}_\perp| = \frac{|\Delta \mathbf{X}|}{C} \propto \frac{1}{N^\alpha}, \quad (5.19)$$

com  $\alpha \sim 1.0$ . Esse resultado demonstra que a convergência do oscilador receptor com sinal soma segue uma distribuição estatística por lei de potência. A convergência é rápida para um número grande de osciladores diretores.

#### 5.4.2 ACOPLAMENTO COM N OSCILADORES DO SISTEMA G-B

Na subseção (5.4.1), nós realizamos a análise teórica para o acoplamento com qualquer valor de  $N$  (número de diretores adicionados ao receptor). A seguir, iremos aplicar essa análise teórica no sistema G-B e depois demonstrar resultados numéricos da análise teórica.

Vamos reescrever as equações diferenciais dos osciladores diretores, que possam ser utilizadas para qualquer número inteiro positivo, e também reescrever as equações do receptor.

Osciladores diretores,  $\mathbf{X}_n$ :

$$\dot{x}_n = \frac{x_n}{R} - g[x_n - y_n] \quad (5.20a)$$

$$\dot{y}_n = g[x_n - y_n] - z_n \quad (5.20b)$$

$$\dot{z}_n = y_n - z_n R_3, \quad (5.20c)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ .

Oscilador receptor,  $\mathbf{X}$ :

$$\dot{x} = \frac{x}{R} - g[x - y] + K_{11}\{[c_1(x_1 - x)] + [c_2(x_2 - x)] + \dots + [c_n(x_n - x)]\} \quad (5.21a)$$

$$\dot{y} = g[x - y] - z + K_{22}\{[c_1(y_1 - y)] + [c_2(y_2 - y)] + \dots + [c_n(y_n - y)]\} \quad (5.21b)$$

$$\dot{z} = y - z R_3 + K_{33}\{[c_1(z_1 - z)] + [c_2(z_2 - z)] + \dots + [c_n(z_n - z)]\}, \quad (5.21c)$$

Modificado as equações acima, conseqüentemente, as Eqs. (5.3) também são alteradas,

Sinal Soma,  $\mathbf{X}_s$ :

$$x_s = x_n/n \quad (5.22a)$$

$$y_s = y_n/n \quad (5.22b)$$

$$z_s = z_n/n, \quad (5.22c)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ .

Dado as equações acima, vamos definir o fluxo do sistema G-B,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_n) = \begin{bmatrix} \frac{x}{R_1} - g[x - y] \\ g[x - y] - z \\ y - R_3 z \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

onde  $g[x - y]$  é o termo de ganho que descreve a corrente que flue no dispositivo não-linear. Resolvendo a Eq. (5.14) para o sistema G-B, com qualquer número de osciladores diretores, consideramos apenas os termos diagonais da matriz de acoplamento  $\mathbf{K}$ , onde os outros termos  $K_{ii} \neq 0$  e  $K_{ij} = 0$ , sendo  $i \neq j$ . Os autovalores,  $\lambda$ , da matriz jacobiana,  $\mathbf{M}$ , são dados por

$$\det \begin{vmatrix} U - \lambda & \beta & 0 \\ \beta & V - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & W - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (5.24)$$

onde  $U = (1/R_1 - \beta - CK_{11})$ ,  $V = (-\beta - CK_{22})$ ,  $W = (-R_3 - CK_{33})$ . O termo  $\beta$  e, conseqüentemente, os autovalores,  $\lambda$ , dependem das trajetórias de  $\mathbf{X}_s$ . Da Eq. (5.24), escrevemos o polinômio característico,

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0, \quad (5.25)$$

com  $a = 1.0$ ,  $b = -(U+V+W)$ ,  $d = (UV+UW+VW+1-\beta^2)$  e  $e = -U(VW+1)+W\beta^2$ , cujas soluções são

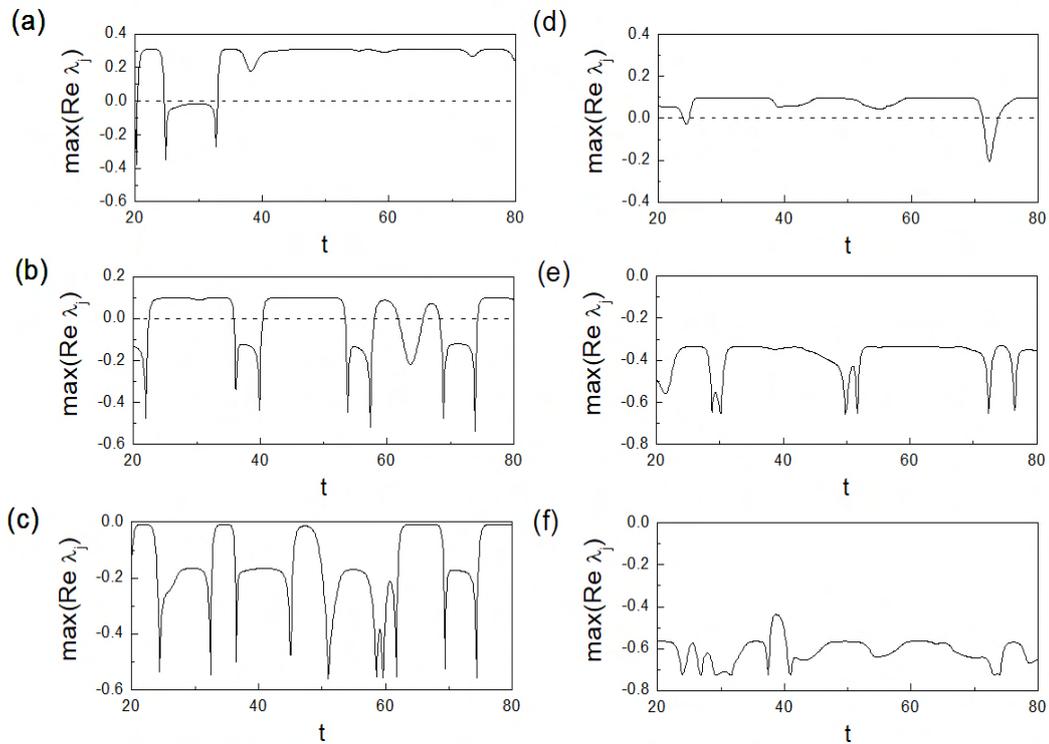
$$\lambda_j = -\frac{1}{3a} \left( b + \xi^j \alpha + \frac{\Delta_0}{\xi^j \alpha} \right) \quad (5.26a)$$

$$\alpha = \left( \frac{\Delta_1 \pm \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2} \right)^{1/3}, \quad (5.26b)$$

para  $j \in \{0, 1, 2\}$ . Na Eq. (5.24),  $\xi = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ ,  $\Delta_0 = b^2 - 3ad$  e  $\Delta_1 = 2b^3 + 27a^2e - 9abd$ . Considerando o nível de acoplamento igual para todos os diretores, ou seja,  $c_n = c$  para qualquer  $n$  resulta em  $C = cN$ . Na Fig. (56), construímos o gráfico dos autovalores do máximo local em função do tempo para as trajetórias  $\mathbf{X}_s(t)$ , usando dois ( $N = 2$ ) ou quatro ( $N = 4$ ) diretores, com três valores diferentes de  $c$  (0.10, 0.20, 0.25). Há uma margem de 1% de diferença entre os parâmetros de todos os osciladores e os termos da diagonal da matriz  $\mathbf{K}$  assumem os valores  $K_{11} = K_{22} = 1.0$ , correspondendo ao acoplamento com as variáveis  $x$  ( $V_1$ ) e  $y$  ( $V_2$ ) simultaneamente, e  $K_{33} = 0.0$ . Essas condições reproduzem os resultados das Fig. (50).

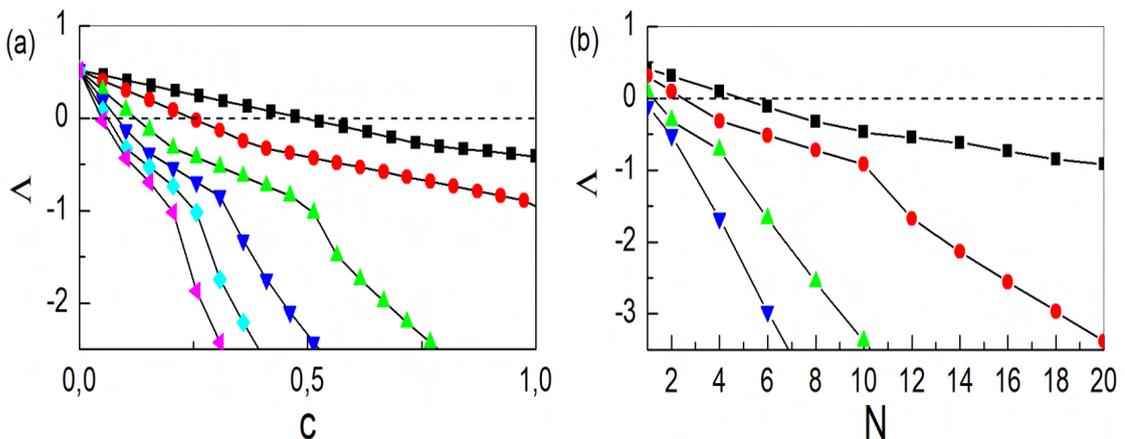
Os autovalores são diferentes ao longo da trajetória, um único autovalor positivo pode causar instabilidade na sincronização. Portanto, o expoente de Lyapunov transversal,  $\Lambda$ , é determinado pelo autovalor máximo nas séries temporais (Eq. (5.15)). Nós construímos dois gráficos para observar o comportamento de  $\Lambda$ : (1)  $\Lambda$  em função da força de acoplamento,  $c$ , Fig. (57a); e (2)  $\Lambda$  em função do número de osciladores diretores,  $N$ , Fig. (57b). Ratificando os resultados anteriores, ou seja, o receptor converge com o sinal soma e conforme aumentamos o número de diretores a convergência melhora.

Figura 56 – Autovalores máximos da trajetória  $\mathbf{X}_s$ , calculados para: (a), (b) e (c) com  $N = 2$ ; (d), (e) e (f) com  $N = 4$ . Sendo (a), (d) com  $c = 0.10$ ; (b), (e) com  $c = 0.20$ ; e (c), (f) com  $c = 0.25$ .



Fonte: Autor

Figura 57 – (a)  $\Delta \times c$ , para diferentes números de *diretores*:  $N = 1$  (quadrados pretos),  $N = 2$  (círculos vermelhos),  $N = 4$  (triângulos para cima verdes),  $N = 6$  (triângulos para baixo azuis),  $N = 8$  (losangos cianos) e  $N = 10$  (triângulos para a esquerda magenta). (b)  $\Delta \times N$ :  $c = 0.1$  (quadrados pretos),  $c = 0.2$  (círculos vermelhos),  $c = 0.4$  (triângulos para baixo verdes) e  $c = 0.6$  (triângulos para baixo azuis).

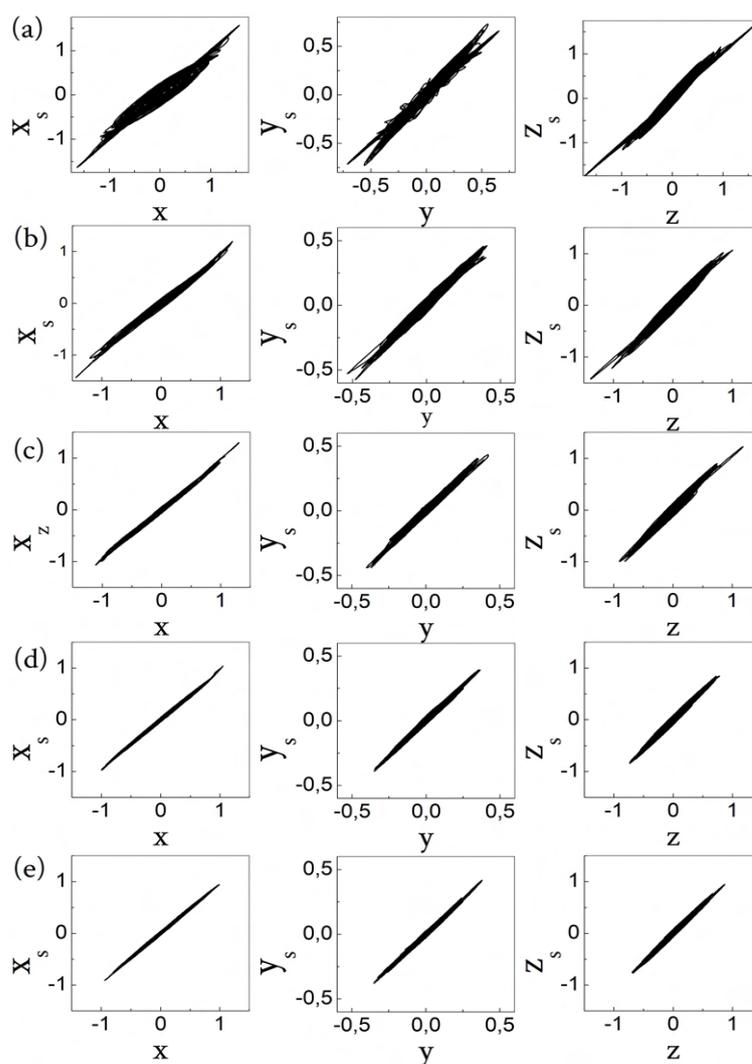


Fonte: Autor

Até aqui temos analisado a estabilidade da sincronização do receptor com o sinal soma, fundamentado na análise teórica da subseção (5.4.1). A seguir, vamos apresentar resultados numéricos tomando como critério avaliativo a distância escalar entre as trajetórias do receptor ( $\mathbf{X}$ ) e do sinal soma ( $\mathbf{X}_s$ ),  $|x_{\perp}|_s$ , as séries temporais e os retratos de fase.

Inicialmente resolvemos as Eq. (5.20) e Eq. (5.21), para  $n$  variando de 2 até  $N = 10$ , onde cada oscilador diretor evolue independentemente e os níveis de acoplamento  $c_1 = c_2 = \dots = c_{10} = c = 1.0$ . Apresentamos as soluções numéricas na Fig. (58). Note que, nos retratos de fase das variáveis  $x \times x_s$ ,  $y \times y_s$  e  $z \times z_s$ , a formação da reta na diagonal torna-se mais evidente conforme  $n$  tende para  $N$ , nos indicando um possível estado de sincronismo completo.

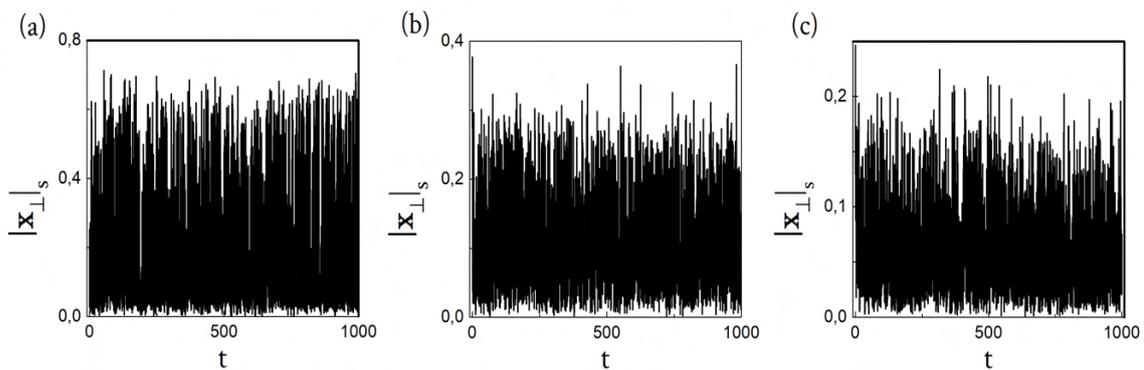
Figura 58 – Sistema G-B, com  $c_1 = c_2 = \dots = c_{10} = c = 1.0$ : Retrato de fase das variáveis,  $x_s \times x$ , lado esquerdo,  $y_s \times y$ , no centro,  $z_s \times z$ , lado direito. Com (a)  $n = 2$ ; (b)  $n = 4$ ; (c)  $n = 6$ ; (d)  $n = 8$ ; (e)  $n = 10$ .



Fonte: Autor

As Fig. (59) apresentam a medida de convergência  $|x_{\perp}|_s \rightarrow 0$ , para  $n = 2, 6, 10$ . Escolhemos apenas esses três valores de  $n$ , porque eles são intermediários e pode nos dá uma visão geral do comportamento de  $|x_{\perp}|_s$ . Os resultados de  $|x_{\perp}|_s$ , nos mostra, claramente, que a amplitude máxima da medida diminui com o aumento do número de  $n$ , ou seja,  $|x_{\perp}|_s$  tende a zero mais facilmente com um número maior de osciladores diretores. Note que alteramos as escalas para cada solução obtida com um  $n$  diferente, no intuito de facilitar a visualização e percebemos como essa redução nas amplitudes é significativa.

Figura 59 – Série temporal: (a)  $|x_{\perp}|_s$ , com  $n = 2$ ; (b)  $|x_{\perp}|_s$ , com  $n = 6$ ; e (c)  $|x_{\perp}|_s$ , com  $n = 10$ .

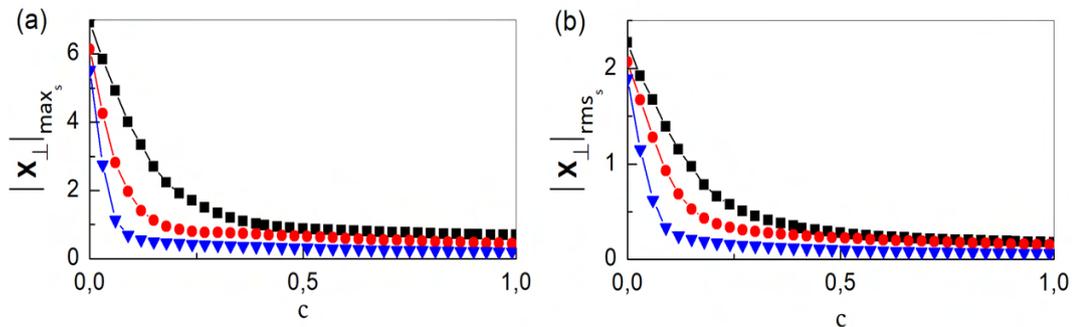


Fonte: Autor

Nós também medimos os valores máximo,  $|x_{\perp}|_{max_s}$ , e médio,  $|x_{\perp}|_{rms_s}$ , em função do nível de acoplamento,  $c$ , variando entre 0.0 e 1.0. Os resultados estão apresentados nas Fig. (60), as quais nos mostram que as medidas decaem cada vez mais rápido conforme  $n$  cresce, ou seja, com  $n$  cada vez maior não precisaremos de um nível de acoplamento relativamente grande para que a convergência ocorra. Isso significa que o receptor converge mais rápido em função do número de  $n$  e não do nível de acoplamento.

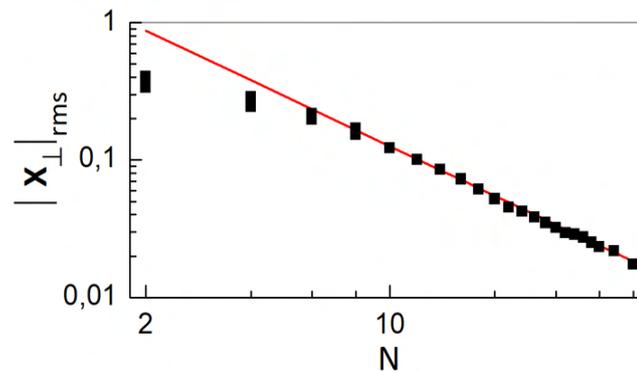
Conforme os resultados da medida  $|x_{\perp}|_{rms_s}$  nos indicou anteriormente, a rápida convergência do receptor com o sinal soma ocorre em função do número de osciladores, nós calculamos numericamente as Eq.(5.20) e Eq. (5.21) para  $n$  variando de 2 até  $N = 50$  (lembrando que todos são osciladores diretores evoluindo independentemente) e construímos o gráfico  $|x_{\perp}|_{rms_s}$  em função de  $N$ . A Fig. (61) nos mostra que o decaimento da solução de  $|x_{\perp}|_{rms_s}$  se comporta seguindo a lei de potência (comportamento estatístico não-normal), ou seja,  $N^{-\alpha}$  onde  $\alpha = 1.2$ . Esse resultado foi previsto pela análise teórica na subseção (5.4.1), mas especificadamente com a Eq. (5.19).

Figura 60 – Convergência do oscilador receptor com o sinal soma, variando o valor de  $c$  de 0.0 até 1.0: (a)  $|x_{\perp}|_{max_s}$  e (b)  $|x_{\perp}|_{rms_s}$ , para  $n = 2$  (quadrados pretos),  $n = 4$  (círculos vermelhos) e  $n = 10$  (triângulos azuis).



Fonte: Autor

Figura 61 –  $|x_{\perp}|_{rms_s}$  em função de  $N$ , com  $N^{-\alpha}$ , reta vermelha, onde  $\alpha = 1.2$ .



Fonte: Autor

Usando o sistema G-B, nos mostramos que um oscilador caótico pode correlacionar-se com um sinal que consiste na soma de sinais de outros osciladores caóticos idênticos. Também mostraremos, na próxima subseção (5.4.3), que esse mesmo comportamento é observado com osciladores do sistema de Lorenz.

### 5.4.3 SISTEMA DE LORENZ

Temos usado o sistema Gauthier-Bienfang (G-B) como plataforma para explorar a configuração de acoplamento, na qual somamos os sinais dos osciladores diretores e adicionamos no receptor. No entanto, como veremos nesta subseção, nós investigamos, numericamente, o mesmo comportamento em um sistema diferente. Nós escolhemos o sistema de Lorenz por ser bastante conhecido e explorado na literatura. Preparamos a simulação numérica para seguir a configuração de acoplamento representada pelo diagrama esquemático da Fig. (55).

Vamos escrever o conjunto de equações do sistema de Lorenz, para descrever os osciladores diretores $_L$  e receptor $_L$ , o subscrito  $L$  é apenas para não confundirmos

com o sistema G-B:

Osciladores diretores $_L$ ,  $\mathbf{X}_{n_L}$ :

$$\dot{x}_{n_L} = \sigma(y_{n_L} - x_{n_L}) \quad (5.27a)$$

$$\dot{y}_{n_L} = \rho x_{n_L} - y_{n_L} - z_{n_L} x_{n_L} \quad (5.27b)$$

$$\dot{z}_{n_L} = x_{n_L} y_{n_L} - \beta z_{n_L}, \quad (5.27c)$$

e

Oscilador receptor $_L$ ,  $\mathbf{X}_L$ :

$$\dot{x}_L = \sigma(y_L - x_L) + K_{11}\{[c_1(x_{1_L} - x_L)] + [c_2(x_{2_L} - x_L)] + \dots + [c_n(x_{n_L} - x_L)]\} \quad (5.28a)$$

$$\dot{y}_L = \rho x_L - y_L - z_L x_L + K_{22}\{[c_1(y_{1_L} - y_L)] + [c_2(y_{2_L} - y_L)] + \dots + [c_n(y_{n_L} - y_L)]\} \quad (5.28b)$$

$$\dot{z}_L = x_L y_L - \beta z_L + K_{33}\{[c_1(z_{1_L} - z_L)] + [c_2(z_{2_L} - z_L)] + \dots + [c_n(z_{n_L} - z_L)]\}, \quad (5.28c)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots, N$  é o número de osciladores diretores $_L$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 24$  e  $\beta = 8/3$  são os parâmetros dos osciladores,  $\mathbf{K}$  é a matriz de acoplamento, e mais uma vez, nós utilizamos apenas os termos diagonais dessa matriz,  $[K_{11}, K_{22}, K_{33}]$  e  $c_1, c_2, \dots, c_n$  são os níveis de acoplamento de cada diretor $_L$ , respectivamente.

O sinal soma do sistema de Lorenz é definido da mesma forma que definimos com o sistema G-B (Eq. (5.29)), ou seja,

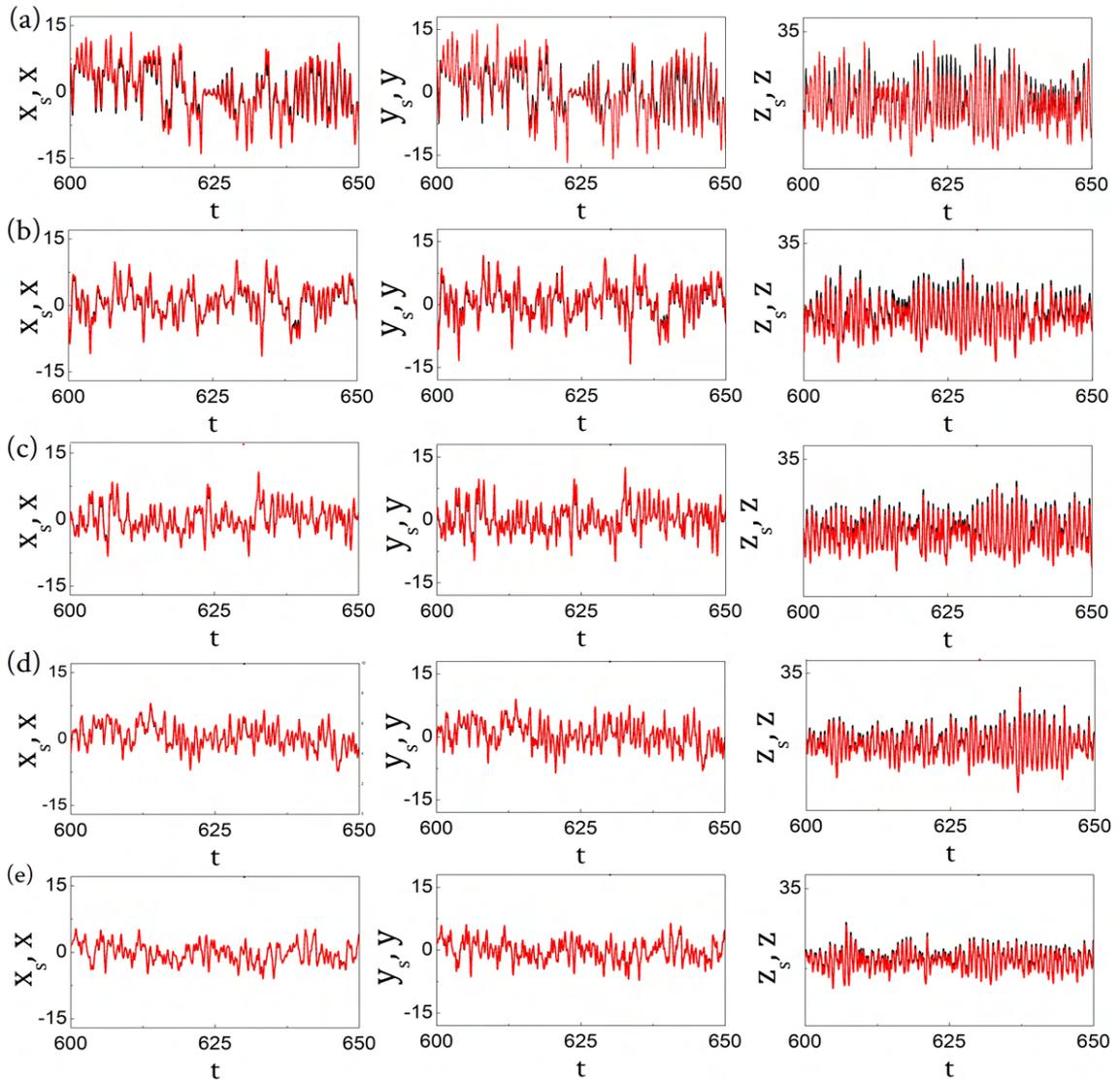
$$x_{s_L} = x_n/n \quad (5.29a)$$

$$y_{s_L} = y_n/n \quad (5.29b)$$

$$z_{s_L} = z_n/n. \quad (5.29c)$$

Inicialmente, nós calculamos as Eq. (5.27) e Eq. (5.28), onde variamos o número de osciladores diretores $_L$  de  $n = 2$  até  $N = 10$ , com os termos diagonais da matriz de acoplamento,  $\mathbf{K}$ ,  $K_{11} = 0.0$ ,  $K_{22} = K_{33} = 1.0$ , ou seja, acoplamento com  $y$  e  $z$ , simultaneamente, e  $c_1 = c_2 = \dots = c_{10} = 10$ . Os demais termos de  $\mathbf{K}$  são todos iguais a zero,  $K_{ij}$ , sendo  $i \neq j$ . A escolha para acoplar em  $y$  e  $z$  foi devido ao fato de que eles respondem muito melhor ao sincronismo do que com as outras variáveis, por exemplo, em  $x$  e  $y$  ou  $x$  e  $z$ . Observamos o mesmo comportamento apresentado com o sistema G-B nas Fig. (58) e Fig. (59), ou seja, o oscilador receptor $_L$  sincroniza com o sinal soma,  $\mathbf{X}_{s_L}$ . As séries temporais das Fig. (62) e os retratos de fase das Fig. (64), nos mostra claramente essa sincronização e como ela melhora a medida que o número de diretores $_L$  aumenta. Esses resultados indicam que essa sincronização contra-intuitiva com a superposição de sinais caóticos não é um fenômeno intrínseco do sistema G-B.

Figura 62 – Sistema de Lorenz, com  $c$ : Séries temporais das variáveis  $x_s$  e  $x$ , lado esquerdo,  $y_s$  e  $y$ , no centro,  $z_s$  e  $z$ , no lado direito: (a)  $n = 2$ ; (b)  $n = 4$ ; (c)  $n = 6$ ; (d)  $n = 8$ ; (e)  $n = 10$ .



Fonte: Autor

Aumentamos o número de osciladores diretores  $L$  variando  $n$  de 2 até  $N = 50$  e calculamos a medida de convergência  $|x_{\perp}|_{rms_s}$ . Com a solução desse cálculo, nós construímos o gráfico  $|x_{\perp}|_{rms_s}$  em função de  $N$ , apresentado na Fig. (65). Note como a solução da medida de convergência decai seguindo lei potência,  $N^{-\alpha}$ , onde  $\alpha = 1.0$ , como ocorre de igual modo com o sistema G-B na subseção (5.4.2), mostrando a rápida convergência entre o receptor  $L$  e o sinal soma, conforme  $n$  cresce.

No próximo capítulo apresentaremos os resultados experimentais que validam nossos resultados numéricas da sincronização de um oscilador caótico com uma superposição de sinais.

Figura 63 – Sistema de Lorenz, com  $c$ : Retratos de fase das variáveis  $x_s \times x$ , lado esquerdo,  $y_s \times y$ , no centro,  $z_s \times z$ , no lado direito: (a)  $n = 2$ ; (b)  $n = 4$ ; (c)  $n = 6$ ; (d)  $n = 8$ ; (e)  $n = 10$ .

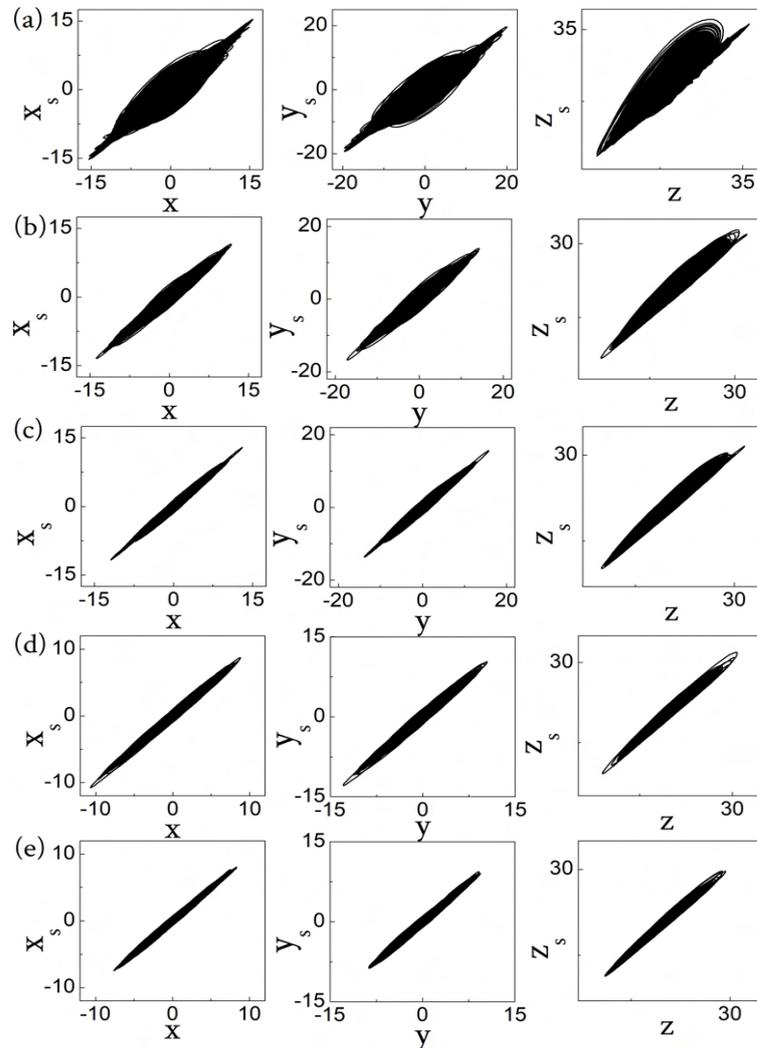
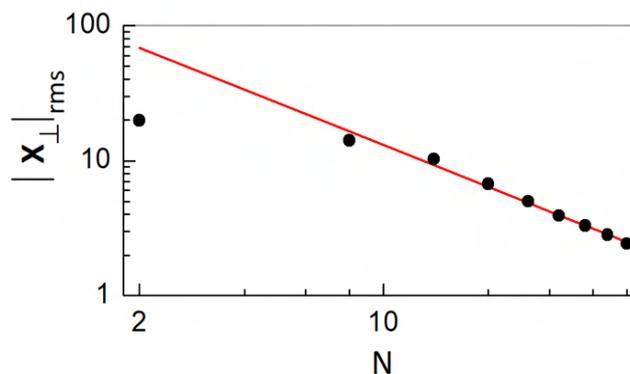


Figura 64 – Fonte: Autor

Figura 65 – Medida da convergência  $|x_{\perp}|_{rms}$  em função de  $N$  variando de 2 até 50, com  $K_{22} = K_{33} = 1.0$  e  $c_1 = c_2 = \dots = c_{50} = c = 0.5$ .



Fonte: Autor

## 6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

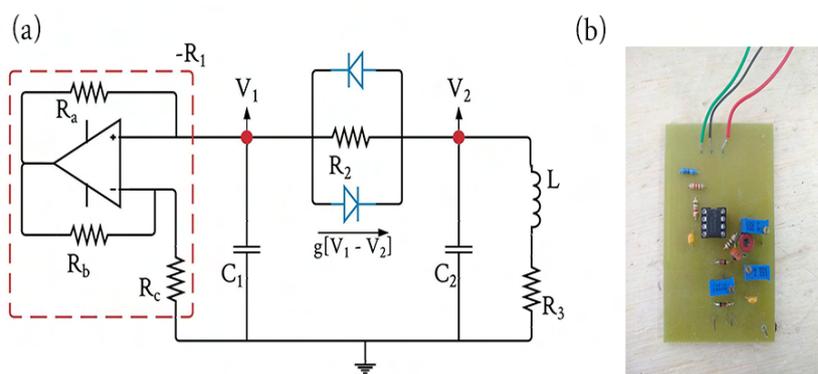
Nos capítulos anteriores, nós apresentamos resultados numéricos do acoplamento de dois, ou mais, osciladores diretores adicionados unidirecionalmente a um oscilador receptor e discutimos como o receptor correlaciona-se com o sinal, composto pela soma dos sinais dos diretores. Neste capítulo vamos apresentar os principais resultados experimentais confirmando esses cálculos numéricos. O trabalho experimental passou por algumas adaptações necessárias, mediante a pandemia do novo coronavírus (COVID-19). Devido o tempo que estivemos afastados do laboratório, não foi possível realizar todo o procedimento como havíamos planejado, mas isso não comprometeu o essencial de nossos resultados ou análises. A seguir vamos apresentar o circuito eletrônico que implementa o sistema G-B (seção (6.1)). Apresentaremos ainda o esquema para o acoplamento (seção (6.2)), a realização desse acoplamento, os resultados observados e sua comparação com os resultados numéricos (seção (6.3)).

### 6.1 SISTEMA ELETRÔNICO

O sistema escolhido como plataforma de estudo experimental foi o sistema Gauthier-Bienfang (G-B), representado pelo diagrama esquemático da Fig. (66a), o qual já foi devidamente explorado e descrito neste trabalho. Seguindo o diagrama da Fig. (66a), três osciladores eletrônicos foram montados individualmente para que pudéssemos implementar o sistema G-B e, assim, realizarmos o acoplamento com dois osciladores diretores e um oscilador receptor. Tomamos cuidado para os seus componentes tivessem limitados em uma margem de 1% de diferença em relação ao valor nominal e, conseqüentemente, a diferença entre eles. A montagem final de um dos três osciladores eletrônicos está apresentada na Fig. (66b). Os valores nominais dos componentes do sistema eletrônico G-B são: Capacitores,  $C_1 = C_2 = 10nF$ ; Resistores,  $R_a = 2.2k\Omega$ ,  $R_b = 1.2k\Omega$ ,  $R_c = 1.5k\Omega$ ,  $R_2 = 8.06k\Omega$ ,  $R_3 = 100\Omega$ ; Indutor,  $L = 56mH$ ; e Diodos, 1N4148; e amplificador operacional, Op07.

Com os osciladores eletrônicos montados, nós verificamos o funcionamento dos mesmos. As Fig. (67a,b) nos mostram as curvas experimentais da série temporal e do retrato de fase das variáveis  $V_1$  e  $V_2$  de um circuito oscilador evoluindo livremente. Os valores dos componentes utilizados foram:  $R_a = 2.1935k\Omega$ ,  $R_b = 1.2023k\Omega$ ,  $R_c = 1.4799k\Omega$ ,  $R_2 = 8.06k\Omega$ ,  $R_3 = 100\Omega$  e  $C_1 = C_2 = 9.89nF$ . Essas observações são importantes de serem feitas para garantir o funcionamento do oscilador, principalmente antes de realizar o acoplamento, como está mostrado na Fig. (68). Os dados experimentais das variáveis  $V_1$  e  $V_2$  foram obtidos por meio das imagens do osciloscópio. Note que o

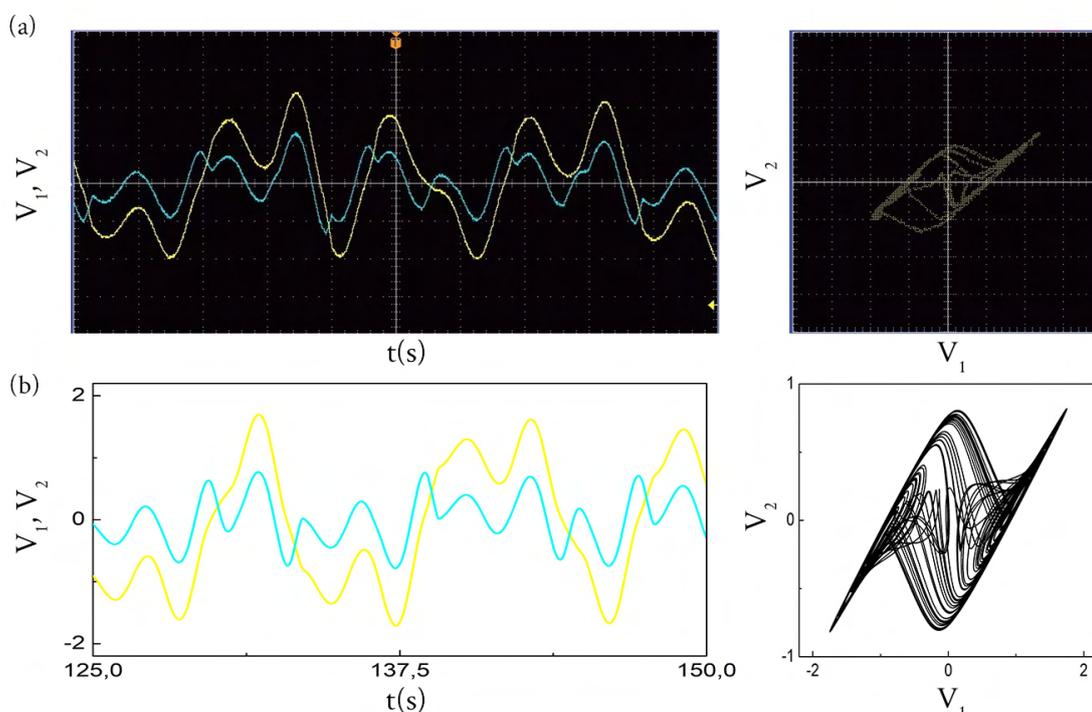
Figura 66 – Sistema Gauthier-Bienfang: (a) diagrama esquemático e (b) sistema eletrônico.



Fonte: Autor

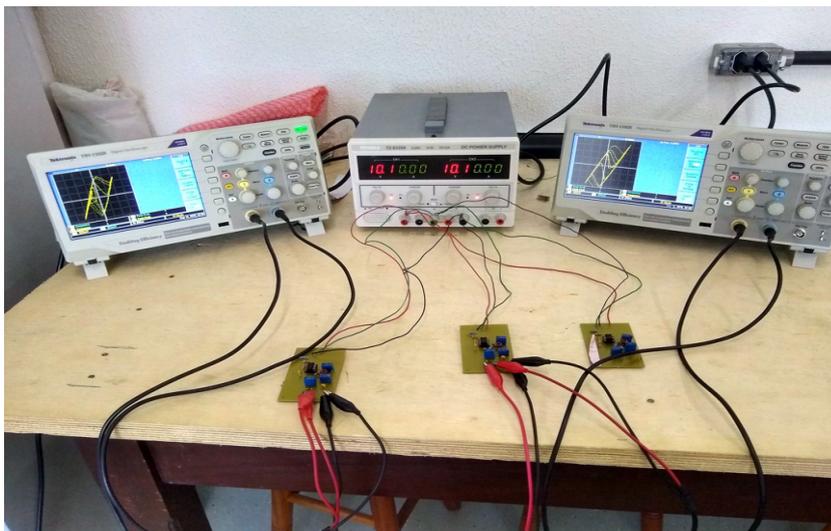
comportamento do nosso oscilador eletrônico corresponde bem com o comportamento observado numericamente, Fig. (67c,d), obtido com os parâmetros adimensionais:  $R_1 = 1.300$ ,  $R_2 = 3.440$  e  $R_3 = 0.193$ .

Figura 67 – Sistema Gauthier-Bienfang. Séries temporais e Retratos de fase das variáveis  $V_1$ , linha ciana,  $V_2$ , linha amarela: (a), (b) Resultado experimental, imagem do osciloscópio, com amplitude de  $500mV_{pp}$  e escala temporal de  $250\mu s$ , onde a tela total consiste em  $2500\mu s$ ; (c), (d) Resultado numérico, com a escala temporal ajustada para  $\mu s$ .



Fonte: Autor

Figura 68 – Verificação do funcionamento adequado dos osciladores eletrônicos.



Fonte: Autor

Uma motivação para utilizar esses sistemas eletrônicos não-lineares é que eles são de fácil implementação numérica e experimental. Evidentemente, fácil não significa trivial e a realização experimental pode ser bastante trabalhosa e complicada. Disponibilidade de bons dispositivos, construção de placas de circuitos, que sejam reproduzíveis, com baixo ruído e capacitância parasita. Esses são alguns dos fatores importantes que podem comprometer os resultados ou garantir o bom funcionamento do sistema eletrônico. Outro tipo de dificuldade se refere aos equipamentos de medida e aquisição. Neste trabalho, como veremos a seguir, nós usamos osciloscópios para a aquisição de sinais de tensão, particularmente  $V_1$  e  $V_2$ .

Verificado o funcionamento correto dos osciladores eletrônicos, o nosso próximo passo é preparar o esquema de circuitos que nos permita acoplar, de forma aditiva e unidirecional, dois osciladores eletrônicos caóticos a um oscilador idêntico. Abordaremos essas realizações na próxima seção.

## 6.2 ESQUEMA PARA O ACOPLAMENTO

Nesta seção iremos apresentar os circuitos eletrônicos que preparamos para acoplar dois osciladores eletrônicos caóticos, apresentados na seção (6.1), a um oscilador idêntico. Utilizamos a mesma configuração explorada numericamente no Capítulo 5, em que chamamos de diretores os dois osciladores acoplados no oscilador, indentificado como, receptor. Acoplamos os dois diretores no receptor, por meio de um circuito somador (SA) e um amplificador diferencial (AD). O SA é responsável por somar os sinais dos osciladores diretores e o AD por realizar a diferença entre o sinal soma e o sinal do receptor.

O SA é, basicamente, um amplificador somador inversor mais um inversor, composto por amplificadores operacionais e resistores, conforme o diagrama esquemático apresentado na Fig. (69). Vamos dividir nosso SA em duas partes e deduzir as equações que o descreve: 1) amplificador inversor; e 2) inversor.

Na parte (1), as correntes,  $i_1$  e  $i_2$ , que fluem para o amplificador operacional são

$$i_1 = \frac{V_{in1}}{R_1}, \quad i_2 = \frac{V_{in2}}{R_2}, \quad (6.1)$$

e a corrente total,  $I = i_1 + i_2$ . O sinal de saída,  $V_{out1}$ , na Fig. (69),

$$0 - V_{out1} = IR_3 \rightarrow V_{out1} = -IR_3. \quad (6.2)$$

Substituindo a corrente total,  $I$ , na Eq. (6.2), obtemos

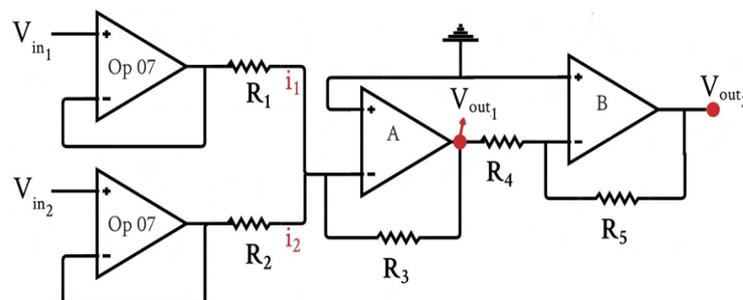
$$V_{out1} = -(i_1 + i_2)R_3 \rightarrow V_{out1} = -\left(\frac{R_3}{R_1}V_{in1} + \frac{R_3}{R_2}V_{in2}\right) \quad (6.3)$$

Na parte (2), no inversor, temos que

$$\begin{aligned} \frac{V_{out2}}{R_5} + \frac{V_{out1}}{R_4} = 0 \rightarrow V_{out2} = -\frac{R_5}{R_4}V_{out1} &= -\frac{R_5}{R_4} \left[ -\left(\frac{R_3}{R_1}V_{in1} + \frac{R_3}{R_2}V_{in2}\right) \right] = \\ &= V_{out2} = \frac{R_5}{R_4} \left[ \left(\frac{R_3}{R_1}V_{in1} + \frac{R_3}{R_2}V_{in2}\right) \right], \quad (6.4) \end{aligned}$$

assim, obtemos a equação final do nosso SA. Note a importância de termos adicionado um inversor.

Figura 69 – Diagrama esquemático do circuito somador com  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 100k\Omega$ , onde A e B são os op-amp do TL082. Todos os resistores todos iguais, o ganho será igual a 1.0



Fonte: Autor

O AD também consiste de amplificadores operacionais e resistores, como está apresentado no diagrama esquemático da Fig. (70). Note que a área demarcada pela linha azul representa o amplificador operacional INA146, um amplificador de diferença

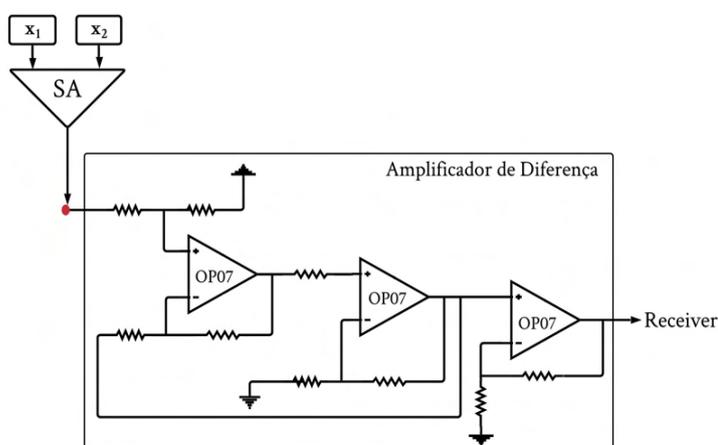


### 6.3 ACOPLAMENTO E RESULTADOS

Nas seções anteriores nós apresentamos os sistemas eletrônicos que implementam o sistema G-B e que realizam as operações soma, dos sinais dos osciladores diretores, e diferença, do sinal soma e receptor. Nesta seção, iremos mostrar como as conexões foram realizadas para que pudesse ocorrer o acoplamento, a aquisição dos dados e os resultados experimentais, sempre comparando com as soluções numéricas correspondentes. Lembrando que essas soluções numéricas são as mesmas que apresentamos no Capítulo 5, para o acoplamento via  $x$ , via  $y$  e via  $x$  e  $y$ , simultaneamente.

Realizamos as conexões para dois diretores que seguem: os sinais dos osciladores diretores são passados para o SA, em seguida o sinal do SA é passado para o AD juntamente com o sinal do receptor. Essas conexões estão representadas no diagrama esquemático da Fig. (71), a qual mostra a soma das variáveis  $x_1$  e  $x_2$  dos diretores 1 e 2. O esquema é o mesmo para as variáveis  $y_1$  e  $y_2$ . Para esse tipo de acoplamento, nós montamos dois somadores, SA e dois amplificadores de diferença, AD. Essas montagens foram realizadas em uma *protoboard*, exceto um somador que já tínhamos montado em uma placa de circuito impresso. Todo esse esquema experimental garante que o acoplamento seja aditivo e unidirecional, onde as variáveis  $x$  e  $y$  podem ser acopladas individualmente ou simultaneamente. A priori nós não iríamos utilizar a *protoboard* na montagem definitiva, mas apenas para testes iniciais. Os desenhos dos circuitos já estavam prontos para a impressão e montagens dos circuitos. No entanto, problemas técnicos com a prototipadora e em seguida com a suspensão das atividades no laboratório devido a pandemia, recorreremos ao *protoboard* para realizar o experimento, quando voltamos a trabalhar, em isolamento, no laboratório.

Figura 71 – Diagrama esquemático do acoplamento.



Fonte: Autor

O sistema de aquisição de dados é composto, basicamente, por um osciloscópio, pendrive e microcomputador. Inicialmente, preparamos placas de aquisição e o software

LabView. Devido a pandemia alteramos o cronograma de atividades no laboratório, o uso da placa de aquisição não foi possível sem a presença de outros pesquisadores. Essa limitação não altera o essencial dos resultados, apenas adaptamos a técnica de aquisição para obtenção dos dados. Portanto, não há prejuízo na validação dos resultados experimentais apresentados e discutimos mais adiante. Outro detalhe que devemos frisar aqui, a respeito da aquisição, é que nós ajustamos a escala temporal dos resultados numéricos para que pudéssemos compará-los com os experimentais. Esse ajuste consiste em converter a escala temporal adimensional para a unidade de  $\mu s$  (microsegundo). Portanto, todos os resultados numéricos serão apresentados com essa escala de tempo.

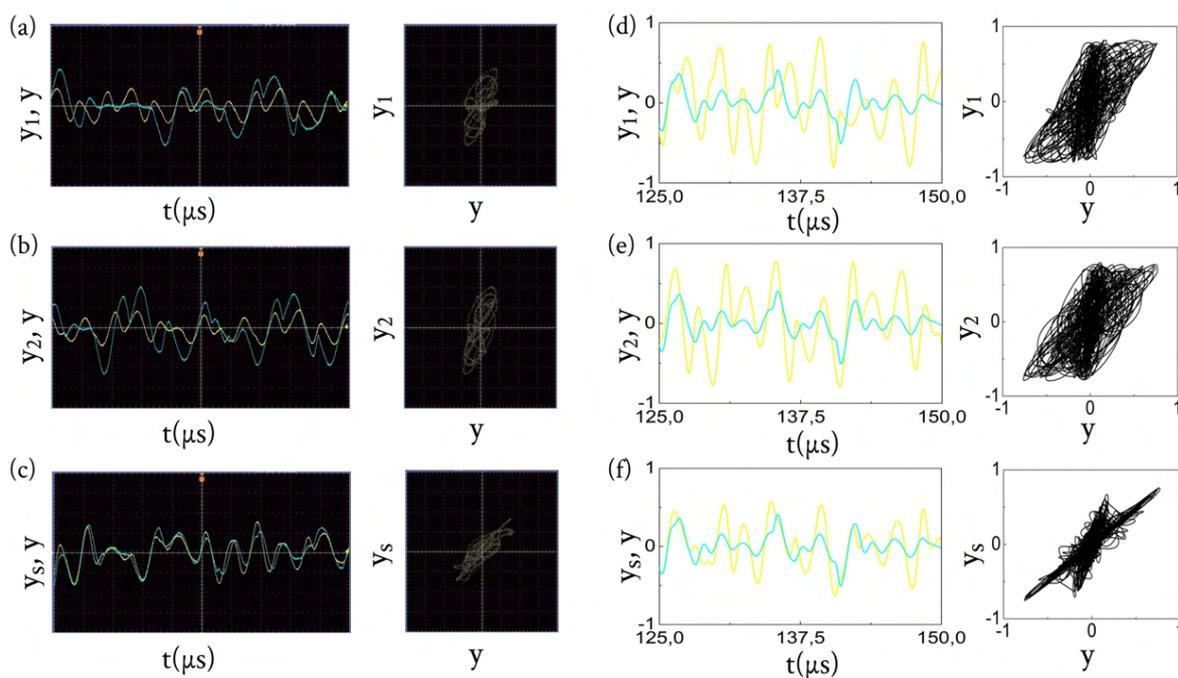
Nos acoplamentos apresentados a seguir, utilizamos a mesma notação do Capítulo 5 para identificar as variáveis do sistema Gauthier-Bienfang. Ou seja,  $V_1 = x$  e  $V_2 = y$ . O sinal soma, composto pela soma das variáveis dos osciladores diretores, com o subscrito  $s$  na variável que corresponde a soma. Por exemplo,  $x_s = (x_1 + x_2)/2$  e  $y_s = (y_1 + y_2)/2$ . Construímos uma tabela com os valores dos componentes utilizados no acoplamento experimental, que estão apresentados na Tabela 2. Para o acoplamento numérico, usamos os valores adimensionais, os mesmos do Capítulo 5, que são:  $R_1 = 1.300, 1.310, 1.313$ ;  $R_2 = 3.44, 3.465, 3.475$ ; e  $R_3 = 0.193, 0.194, 0.195$ .

Tabela 2 – Valores dos componentes dos osciladores

Osciladores	Componentes experimentais			
	$R_a, R_b, R_c$	$R_2$	$R_3$	$C_1$ e $C_2$
diretor 1	2.1940k $\Omega$ , 1.2013k $\Omega$ , 1.4799k $\Omega$	8.06k $\Omega$	100 $\Omega$	9.89nF
diretor 2	2.1930k $\Omega$ , 1.2010k $\Omega$ , 1.4790k $\Omega$	8.06k $\Omega$	100 $\Omega$	9.87nF
receptor	2.1945k $\Omega$ , 1.2023k $\Omega$ , 1.4802k $\Omega$	8.06k $\Omega$	100 $\Omega$	9.86nF

Inicialmente, nós acoplamos apenas com a variável  $x$  ( $V_1$ ), depois só com a variável  $y$  ( $V_2$ ) e, finalmente, com as duas variáveis,  $x$  e  $y$ , simultaneamente. Para o acoplamento via  $x$ , utilizamos dois SA e um AD. Um SA e um AD foram usados para acoplar aditivamente o sinal soma dos  $x'_s$  dos diretores,  $x_s$ , e o segundo SA para observamos o comportamento de  $y$  do receptor em relação ao sinal da soma dos  $y'_s$ ,  $y_s$ , também dos diretores. Ou seja, nós realizamos o acoplamento conforme o diagrama esquemático da Fig. (71). As Fig. (72) nos mostra os resultados desse acoplamento, tanto experimental quando numérico. Note que os resultados experimentais, Fig. (72a-c), ratificam as soluções numéricas, Fig. (72d-f), para o mesmo acoplamento. Embora não haja uma completa convergência, devido as diferenças de amplitude, o oscilador receptor segue o sinal soma (ou sinal do SA),  $y_s$ , e não possui correlação com nenhum dos dois diretores individualmente. Esses resultados estão em acordo com as análises feitas na seção (5.1) do capítulo 5.

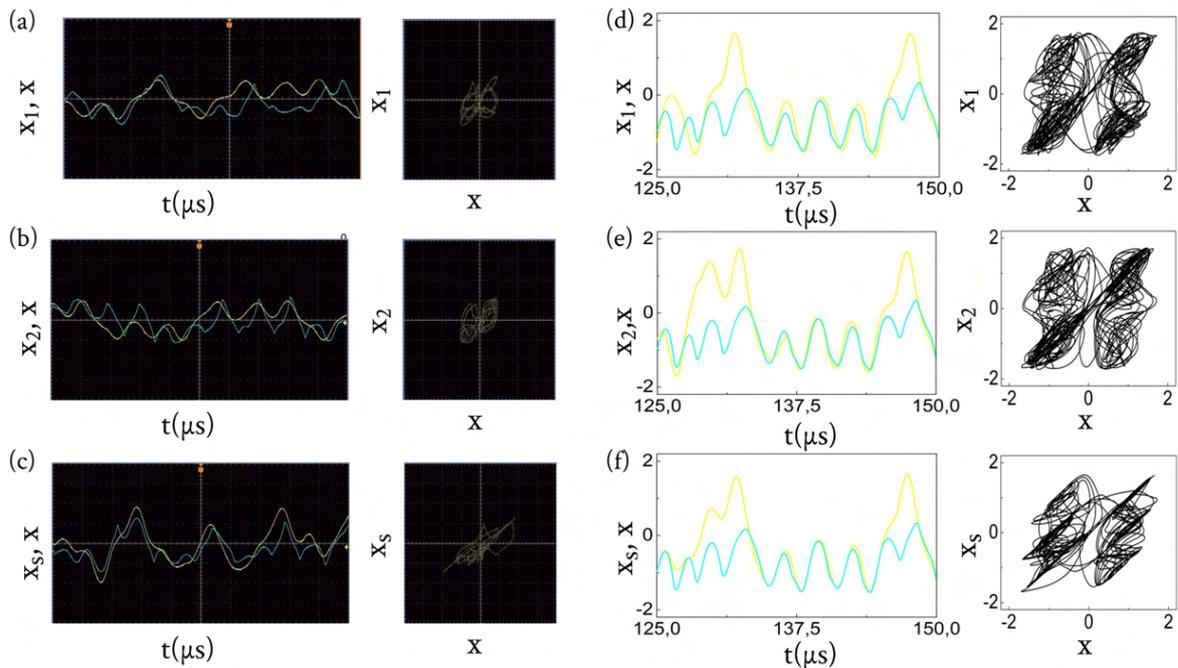
Figura 72 – Acoplamento via  $x$  ( $V_1$ ). Série temporal e retratos de fase das variáveis  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_s$ , linha amarela, e  $y$ , linha ciana: (a)-(c) Resultado experimental, consiste nas imagens do osciloscópio com amplitude de  $500mV_{pp}$  e a escala temporal de  $250\mu s$ , a tela completa contém  $2500\mu s$ ; (d)-(f) Resultados numéricos com a escala temporal ajustada para  $\mu s$ .



Fonte: Autor

Para o acoplamento via  $y$  ( $V_2$ ), o procedimento experimental é do mesmo modo como foi realizado com o acoplamento via  $x$  ( $V_1$ ), apresentado anteriormente. Ou seja, usamos dois SA e um AD. Agora, o sinal que será acoplado aditivamente, garantindo a unidirecionalidade, é o sinal soma dos  $y$ 's. Com o segundo SA observamos o comportamento da variável  $x$  do receptor em relação ao sinal soma dos  $x$ 's dos diretores,  $x_s$ . Os resultados experimentais, como também numéricos, estão apresentados nas séries temporais e retratos de fase das Fig. (73). Note que mesmo sem uma exata sobreposição de fase e amplitude, na série temporal do resultado experimental o receptor possui mais correlação com o sinal soma  $x_s$ , Fig. (73c), do que com os diretores individualmente, Fig. (73a,b). Esse comportamento se reflete nos retratos de fase. Observe que  $x \times x_s$  tende a formação de uma reta na diagonal mais do que  $x \times x_1$  e  $x \times x_2$ . Esses resultados não difere do que foi obtido com as soluções numéricas, Fig. (73d-f).

Figura 73 – Acoplamento via  $y$  ( $V_2$ ). Série temporal e retratos de fase das variáveis  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_s$ , linha amarela, e  $x$ , linha ciana: (a)-(c) Resultado experimental, consiste nas imagens do osciloscópio com amplitude de  $1V_{pp}$  e a escala temporal de  $250\mu s$ , a tela completa contém  $2500\mu s$ ; (d)-(f) Resultados numéricos com a escala temporal ajustada para  $\mu s$ .



Fonte: Autor

Depois do acoplamento individual de  $x$  e  $y$ , nós realizamos o acoplamento usando as duas variáveis simultaneamente. Para acoplá-las dessa maneira, nós utilizamos dois somadores (SA) e dois amplificadores de diferença (AD). O procedimento que usamos para acoplar cada variável separadamente, discutido acima, é o mesmo para acoplar  $x$  e  $y$  simultaneamente. Portanto, nós acoplamos experimentalmente os sinais soma  $x_s$  e  $y_s$ , dos osciladores eletrônicos diretores, aditivamente no oscilador eletrônico receptor. Os resultados estão apresentados nas séries temporais e nos retratos de fase das Fig. (75) e Fig. (76). Os quais comparamos com as soluções numéricas que corresponde ao acoplamento experimental. Lembrando que a escala de tempo das soluções numéricas foram ajustadas para  $\mu s$ , possibilitando essa comparação. Os resultados mostram claramente que o oscilador receptor não está sincronizado com nenhum dos osciladores diretores individualmente, ou seja, fase e amplitude descorrelacionadas, Fig. (75a,b) e Fig. (76a,b). Da mesma maneira que observamos no acoplamento individual das variáveis. Porém, o receptor está sincronizado com o sinal soma, mesmo com uma pequena diferença relativa nas amplitudes, as fases estão correlacionadas, Fig. (75c) e Fig. (76c). Note que o comportamento experimental apresenta coerência com os resultados numéricos, que nos mostra da mesma forma o receptor convergindo com o sinal soma, seja  $x_s$  ou  $y_s$ , Fig. (75f) e Fig. (76f).

Figura 74 – Sincronização de um oscilador do sistema G-B com uma combinação linear de dois osciladores idênticos. Séries temporais e retratos de fase das variáveis  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_s$  e  $x$ , linha vermelha: (a), (b) e (c) Resultados experimentais, linha preta; (d), (e) e (f) Resultados numéricos, linha azul.

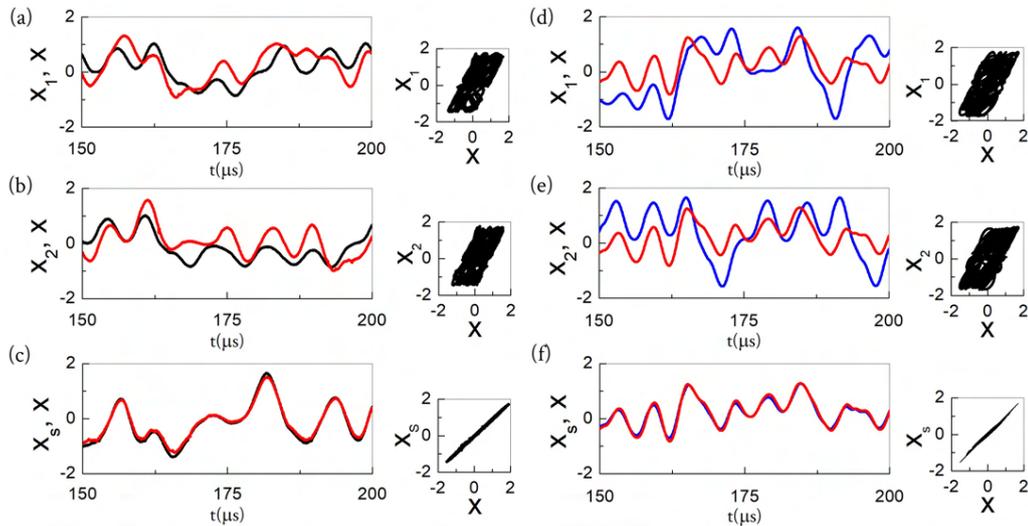
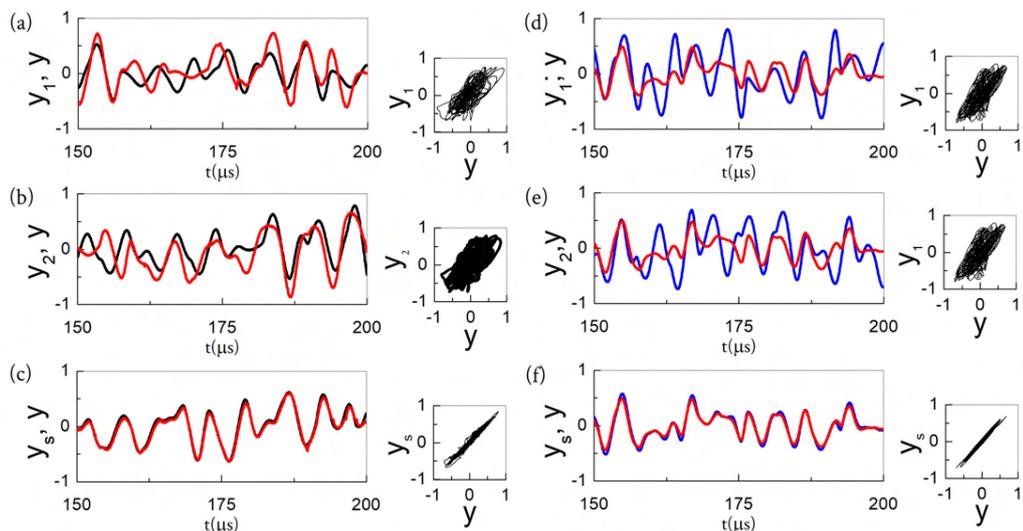


Figura 75 – Fonte: Autor

Figura 76 – Sincronização de um oscilador do sistema G-B com uma combinação linear de dois osciladores idênticos. Séries temporais e retratos de fase das variáveis  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_s$  e  $y$ , linha vermelha: (a), (b) e (c) Resultados experimentais, linha preta; (d), (e) e (f) Resultados numéricos, linha azul.



Fonte: Autor

Neste capítulo nós exploramos experimentalmente o acoplamento de dois osciladores eletrônicos caóticos a um terceiro oscilador eletrônico idêntico. Esse acoplamento resultou na sincronização do receptor com o sinal soma. Esse sinal soma é a superposição dos sinais dos outros dois osciladores eletrônicos. A tendência do receptor correlacionar com o sinal soma ocorreu tanto nos acoplamentos com as variáveis  $x$  e  $y$

individualmente, quanto com elas acopladas simultaneamente. O interessante desses resultados é que esse tipo de sincronização é contraintuitiva e não é intrínseco do sistema G-B. Além disso, até onde investigamos, ainda não havia sido relatado na literatura que um sistema não-linear pudesse sincronizar com uma superposição de sinais.

Nossos resultados apresentados até aqui são um ponto de partida para guiar novas investigações, principalmente experimentais, como aumentar o número de osciladores eletrônicos caóticos no acoplamento. Pois neste capítulo os resultados consiste apenas com dois.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho desenvolvido nesta dissertação explorou o fenômeno da sincronização em sistemas caóticos. Apresentamos alguns tipos de sincronismo e discutimos alguns deles como a sincronização completa, sincronização de fase ou generalizada. Também apresentamos a sincronização intermetente que ocorre, por exemplo, no acoplamento aditivo unidirecional, entre dois osciladores do sistema Gauthier-Bienfang (G-B). Para esse comportamento sua análise estatística de sincronização resulta em uma distribuição que segue lei de potência para eventos de amplitude intermediária, mas também apresenta eventos extremos do tipo dragão-rei, que desviam da lei de potência. Construimos nossos osciladores com os quais repetimos essas observações. Com esse mesmo sistema G-B, nós tínhamos o objetivo, inicialmente, de estudarmos o acoplamento aditivo unidirecional com dois osciladores caóticos, ampliando assim os estudos com um único oscilador idêntico. A motivação inicial desses estudos era investigar uma possível "disputa" entre os sinais dos dois osciladores que seriam acoplados. Os dois osciladores estariam evoluindo em regimes diferentes. Assim, com essa diferença no comportamento dinâmico de cada um, através de filtros de frequência e/ou atraso entre os sinais, esperávamos eventualmente observar estados do tipo quimera, onde o oscilador receptor pudesse coexistir entre dois regimes diferentes. No entanto, durante a investigação, por meio de cálculos numéricos, obtivemos os resultados de uma sincronização do oscilador receptor com o sinal soma. Esse sinal soma é o resultado da superposição dos sinais dos outros osciladores. Isso foi possível utilizando apenas uma variável ou duas variáveis simultaneamente nos acoplamentos. Nós verificamos essa sincronização experimentalmente com osciladores eletrônicos caóticos, que implementou o sistema G-B, consolidando nossos resultados numéricos desses resultados completamente originais.

Mesmo sendo uma correlação contraintuitiva, nós mostramos através da análise da sincronização do oscilador receptor com o sinal soma, particularmente com o sistema G-B, através das medidas de convergência das grandezas  $|x_{\perp}|_{max}$  e  $|x_{\perp}|_{rms}$ , que a correlação ocorre ao passo que essas medidas tendem a zero, mediante o aumento do nível de acoplamento. Nota-se a estabilidade dessa sincronização, em que o receptor mantém-se travado ao sinal soma de forma permanente. Além disso, a qualidade da correlação se revelou melhorar quando aumentamos o número de osciladores acoplados no receptor. Consequentemente, com esse aumento de osciladores, não seria necessário o mesmo nível de acoplamento para que a convergência entre o oscilador receptor e o sinal soma ocorresse. A partir desses resultados, nós conseguimos demonstrar, teoricamente e numericamente, que essa melhoria segue lei de potência, onde a medida  $|x_{\perp}|_{rms}$  decai rapidamente, quando o número de osciladores cresce.

Esses comportamentos, estudados sistematicamente com o sistema G-B, também foram observado no sistema de Lorenz.

Os resultados que apresentamos nesta dissertação, abrem novas opções de investigação no sentido de explorar outros sistemas não-lineares o mesmo comportamento, além daqueles que já investigamos aqui. Um outro ponto importante, dos nossos resultados, é que a configuração de acoplamento que utilizamos se assemelha com a de um neurônio. Individualmente cada neurônio tem uma configuração de conexão muito assimétrica, com um número muito grande de entradas e uma única saída, justificando o aprofundamento do estudo de configurações de saída única em sincronização de rede.

## REFERÊNCIAS

- AGRAWAL, G. **Nonlinear Fiber Optics**. 5. ed. [S.l.]: Academic Press, 2012.
- ALBERT, R.; BARABÁSI, A.-L. Statistical mechanics of complex networks. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 74, p. 47–97, 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.74.47>>. Acesso em: 05 de jun. 2020.
- ARENAS, A.; DIAZ-GUILERA, A.; KURTHS, J.; MORENO, Y.; ZHOU, C. Synchronization in complex networks. **Physics Reports**, v. 469, n. 3, p. 93–153, 2008. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157308003384>>. Acesso em: 05 de set. 2019.
- ARGYRIS, A.; SYVRIDIS, D.; LARGER, L.; LODI-ANNOVAZZI, V.; COLET, P.; FISCHER, I.; GARCIA-OJALVO, J.; MIRASSO, C. R.; PESQUERA, L.; SHORE, A. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links. **Nature**, v. 438, p. 343–346, 2005. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/nature04275>>. Acesso em: 20 de mai. 2019.
- BAYLY, P. V.; JOHNSON, E. E.; WOLF, P. D.; GREENSIDE, H. S.; SMITH, W. M.; IDEKER, R. E. A quantitative measurement of spatial order in ventricular fibrillation. **J Cardiovasc Electrophysiol**, v. 4, n. 5, p. 533–46, 1993. Disponível em: <<https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/8269320/>>. Acesso em: 20 de jun. 2020.
- BELYKH, I.; LANGE, E. de; HASLER, M. Synchronization of bursting neurons: What matters in the network topology. **Phys. Rev. Lett.**, v. 94, p. 188101, 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.188101>>. Acesso em: 20 de jun. 2020.
- BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G.; VALLADARES, D.; ZHOU, C. The synchronization of chaotic systems. **Physics Reports**, v. 366, n. 1, p. 1–101, 2002. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157302001370>>. Acesso em: 13 de mar. 2020.
- BOCCALETTI, S.; LATORA, V.; MORENO, Y.; CHAVEZ, M.; HWANG, D.-U. Complex networks: Structure and dynamics. **Physics Reports**, v. 424, n. 4, p. 175–308, 2006. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015730500462X>>. Acesso em: 03 de ago. 2020.
- BULLMORE, E.; SPORNS, O. Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems. **Nat Rev Neurosci**, v. 10, p. 186–198, 2009. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/nrn2575>>. Acesso em: 17 de nov. 2020.
- CAVALCANTE, H. L. D. S.; ORIÁ, M.; SORNETTE, D.; OTT, E.; GAUTHIER, D. J. Predictability and suppression of extreme events in a chaotic system. **Phys. Rev. Lett.**, v. 111, p. 198701, 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.198701>>. Acesso em: 10 de abr. 2019.

- CHAKRAVARTULA, S.; INDIC, P.; SUNDARAM, B.; KILLINGBACK, T. Emergence of local synchronization in neuronal networks with adaptive couplings. **PLOS ONE**, v. 12, n. 6, p. 1–16, 2017. Disponível em: <<https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0178975>>. Acesso em: 09 de nov. 2020.
- CHERN, J.-L.; HSIAO, T.-C.; LIH, J.-S.; LI, L.-E.; OTSUKA, K. Synchronized chaos and intermittent synchronization. **Chinese Journal of Physics**, v. 36, n. 5, p. 667–676, 1998. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/publication/237629775\\_Synchronized\\_Chaos\\_and\\_Intermittent\\_Synchronization](https://www.researchgate.net/publication/237629775_Synchronized_Chaos_and_Intermittent_Synchronization)>. Acesso em: 02 de out. 2020.
- CHOI, H.; MIHALAS, S. Synchronization dependent on spatial structures of a mesoscopic whole-brain network. **bioRxiv**, v. 15, n. 4, 2019. Disponível em: <<https://www.biorxiv.org/content/early/2018/05/11/319830>>. Acesso em: 04 de mai. 2020.
- CHUA, L. O. The genesis of chua's circuit. **Arkiv Elek. Uberstrangungstechnik**, v. 46, n. 4, p. 250–257, 1992. Disponível em: <<https://inst.eecs.berkeley.edu/~ee129/sp09/handouts/GenesisChuasCircuit.pdf>>. Acesso em: 23 de jul. 2020.
- CISZAK, M.; CALVO, O.; MASOLLER, C.; MIRASSO, C. R.; TORAL, R. Anticipating the response of excitable systems driven by random forcing. **Phys. Rev. Lett.**, v. 90, p. 204102, 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.204102>>. Acesso em: 21 de set. 2020.
- CUOMO, K. M.; OPPENHEIM, A. V. Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications. **Phys. Rev. Lett.**, v. 71, p. 65–68, 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.71.65>>. Acesso em: 08 de mai. 2019.
- DEBANNE, D.; CAMPANAC, E.; BIALOWAS, A.; CARLIER, E.; ALCARAZ, G. Axon physiology. **Physiological Reviews**, v. 2, n. 91, p. 555–602, 2011. Disponível em: <<https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/21527732/>>. Acesso em: 10 de ago. 2020.
- FRISTON, K. J.; HARRISON, L.; PENNY, W. Dynamic causal modelling. **NeuroImage**, v. 19, n. 4, p. 1273–1302, 2003. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1053811903002027>>. Acesso em: 17 de nov. 2020.
- FUJISAKA, H.; YAMADA, T. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. **Progress of Theoretical Physics**, v. 69, n. 1, p. 32–47, 1983. Disponível em: <<https://doi.org/10.1143/PTP.69.32>>. Acesso em: 10 de jan. 2020.
- GABILISCO, S. **The Illustrated Dictionary of Electronics**. 8. ed. [S.l.]: McGraw-Hill/TAB Electronics, 2001.
- GAUTHIER, D. J.; BIENFANG, J. C. Intermittent loss of synchronization in coupled chaotic oscillators: Toward a new criterion for high-quality synchronization. **Phys. Rev. Lett.**, v. 77, p. 1751–1754, 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.1751>>. Acesso em: 12 de abr. 2019.
- GONZÁLEZ-MIRANDA, J. M. Generalized synchronization in directionally coupled systems with identical individual dynamics. **Phys. Rev. E**, v. 65, p. 047202, 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.65.047202>>. Acesso em: 03 de set. 2020.

HEAGY, J. F.; PLATT, N.; HAMMEL, S. M. Characterization of on-off intermittency. **Phys. Rev. E**, v. 49, p. 1140–1150, 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.49.1140>>. Acesso em: 02 de out. 2020.

HOROWITZ, P.; HILL, W. **The Art of Electronics**. 3. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.

HUANG, C. Y.-M.; RASBAND, M. N. Axon initial segments: structure, function, and disease. **Annals of the New York Academy of Sciences**, v. 1420, n. 1, p. 46–61, 2018. Disponível em: <<https://nyaspubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/nyas.13718>>. Acesso em: 10 de ago. 2020.

JUNIOR, G. F. d. O. **Estatística de falhas de sincronismo entre circuitos elétricos caóticos**. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018. Disponível em: <<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9547>>. Acesso em: 10 de abr. 2019.

KENNEDY, M. P. Three steps to chaos. i. evolution. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, v. 40, n. 10, p. 640–656, 1993. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/246140?section=abstract>>. Acesso em: 18 de mai. 2019.

KEUNINCKX, L.; SPRIANO, M. C.; FISCHER, I.; MIRASSO, C. R.; NGUIMDO, R. M.; SANDE, G. V. Encryption key distribution via chaos synchronization. **Scientific Reports**, v. 7, n. 43428, 2017. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/srep43428>>. Acesso em: 20 de set. 2019.

KIRBY, R. L.; NUGENT, S. T.; MARLOW, R. W.; MACLEOD, D. A.; MARBLE, A. E. Coupling of cardiac and locomotor rhythms. **J Appl Physiol**, v. 66, n. 1, p. 323–9, 1989. Disponível em: <<https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/2917937/>>. Acesso em: 10 de jan. 2020.

KITTEL, A.; PYRAGAS, K.; RICHTER, R. Prerecorded history of a system as an experimental tool to control chaos. **Phys. Rev. E**, v. 50, p. 262–268, 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.50.262>>. Acesso em: 25 de nov. 2019.

KOCAREV, L.; PARLITZ, U. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems. **Phys. Rev. Lett.**, v. 76, p. 1816–1819, 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.1816>>. Acesso em: 16 de set. 2020.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of Atmospheric Sciences**, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963. Disponível em: <[https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469\\_1963\\_020\\_0130\\_dnf\\_2\\_0\\_co\\_2.xml](https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/20/2/1520-0469_1963_020_0130_dnf_2_0_co_2.xml)>. Acesso em: 16 de mai. 2020.

MISHRA, A.; SAHA, S.; VIGNESHWARAN, M.; PAL, P.; KAPITANIAK, T.; DANA, S. K. Dragon-king-like extreme events in coupled bursting neurons. **Phys. Rev. E**, v. 97, p. 062311, 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.97.062311>>. Acesso em: 15 de out. 2020.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. 3. ed. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2011.

NEWMAN, M. Power laws, pareto distributions and zipf's law. **Contemporary Physics**, v. 46, n. 5, p. 323–351, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00107510500052444>>. Acesso em: 19 de nov. 2019.

NEWMAN, M. E. J. The structure and function of complex networks. **SIAM Review**, v. 45, n. 2, p. 167–256, 2003. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/25054401>>. Acesso em: 13 de jun. 2020.

NICOLIS, G.; NICOLIS, C. **Foundations of Complex Systems**. 2. ed. [S.l.]: World Scientific, 2012.

PARLITZ, U.; JUNGE, L.; LAUTERBORN, W.; KOCAREV, L. Experimental observation of phase synchronization. **Phys. Rev. E**, v. 54, p. 2115–2117, 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.54.2115>>. Acesso em: 24 de ago. 2020.

PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Phys. Rev. Lett.**, v. 64, 1990. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.821>>. Acesso em: 10 de jul. 2019.

\_\_\_\_\_. Driving systems with chaotic signals. **Phys. Rev. A**, v. 44, p. 2374–2383, 1991. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.44.2374>>. Acesso em: 15 de jan. 2020.

PECORA, L. M.; SORRENTINO, F.; HAGERSTROM, A. M.; MURPHY, T. E.; ROY, R. Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries. **Nature Communications**, v. 5, n. 4079, 2014. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/ncomms5079#citeas>>. Acesso em: 14 de jan. 2020.

PIKOVSKY, A.; KURTHS, J.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. **Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences**. [S.l.]: Cambridge university press, 2003.

PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. Synchronization: A universal concept in nonlinear science. **American Journal of Physics**, v. 70, n. 6, p. 655–655, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.1475332>>. Acesso em: 21 de ago. 2019.

PLATT, N.; SPIEGEL, E. A.; TRESSER, C. On-off intermittency: A mechanism for bursting. **Phys. Rev. Lett.**, v. 70, p. 279–282, 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.279>>. Acesso em: out. 2020.

POL, B. V. D.; MARK, J. V. D. Frequency demultiplication. **Nature**, v. 120, p. 363–364, 1927. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/120363a0>>. Acesso em: 15 de out. 2020.

RAMACHANDRAN, S. **Chaotic synchronizations in regular networks of nonlinear time-delay systems**. 242 f. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Bharathidasan, Tiruchirappalli 620 024, 2013. Disponível em: <[10.13140/2.1.4095.7129](https://doi.org/10.13140/2.1.4095.7129)>. Acesso em: 12 de mar. 2020.

ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J. Phase synchronization of chaotic oscillators. **Phys. Rev. Lett.**, v. 76, p. 1804–1807, 1996. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.1804>>. Acesso em: 23 de ago. 2020.

- \_\_\_\_\_. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. **Phys. Rev. Lett.**, v. 78, p. 4193–4196, 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.78.4193>>. Acesso em: 24 de ago. 2020.
- ROY, R.; THORNBURG, K. S. Experimental synchronization of chaotic lasers. **Phys. Rev. Lett.**, v. 72, p. 2009–2012, 1994. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.2009>>. Acesso em: 12 de mar. 2020.
- RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, v. 57, n. 5, p. 397–398, 1976. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960176901018>>. Acesso em: 15 de fev. 2020.
- RULKOV, N. F.; SUSHCHIK, M. M.; TSIMRING, L. S.; ABARBANEL, H. D. I. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. **Phys. Rev. E**, v. 51, p. 980–994, 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.51.980>>. Acesso em: 16 de set. 2020.
- SCHÄFER, C.; ROSENBLUM, M. G.; KURTHS, J.; ABEL, H.-H. Heartbeat synchronized with ventilation. **Nature**, v. 392, p. 239–240, 1998. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/32567>>. Acesso em: 16 de mai. 2020.
- SHIOGAI, Y.; STEFANOVSKA, A.; MCCLINTOCK, P. Nonlinear dynamics of cardiovascular ageing. **Physics Reports**, v. 488, n. 2, p. 51–110, 2010. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157309002877>>. Acesso em: 13 de jul. 2020.
- SORNETTE, D. **Probability Distributions in Complex Systems**. ArXiv, 2007. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/0707.2194>>. Acesso em: 05 de jan. 2020.
- \_\_\_\_\_. Dragon-kings, black-swans and prediction (invited). **AGU Fall Meeting Abstracts**, p. NG43J–01, 2010.
- STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. 2. ed. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- UHLE, M. Chua, l. o., c. a. desoer, e. s. kuh: Linear and nonlinear circuits. mcgraw-hill book company, new york 1987, xvii, 839 s., dm 122,40. isbn 0-07-010898-6. **Biometrical Journal**, v. 30, n. 7, p. 867–868, 1988. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/bimj.4710300726>>. Acesso em: 24 de jan. 2020.
- VOSS, H. U. Anticipating chaotic synchronization. **Phys. Rev. E**, v. 61, p. 5115–5119, 2000. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.61.5115>>. Acesso em: 29 de set. 2020.
- XU, K.; MAIDNA, J. P.; CASTRO, S.; ORIO, P. Synchronization transition in neuronal networks composed of chaotic or non-chaotic oscillators. **Nature Communications**, v. 8, n. 8370, 2018. Disponível em: <<https://www.nature.com/articles/s41598-018-26730-9>>. Acesso em: 03 de fev. 2020.