



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
UNIDADE ACADÊMICA DO CABO DE SANTO AGOSTINHO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FÍSICA

LUCAS MARTINS CASTELO BRANCO

Sincronização de osciladores Colpitts operando em regime não-linear com
acoplamentos uni e bi-direcional, com e sem atraso

Cabo de Santo Agostinho

2024

LUCAS MARTINS CASTELO BRANCO

Sincronização de osciladores Colpitts operando em regime não-linear com acoplamentos uni e bi-direcional, com e sem atraso

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Física, Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Física.

Área de Concentração: Optoeletrônica

Linha de pesquisa: Dinâmica Não-Linear

Orientador: Prof. Marcos Oriá

Coorientador: Prof. Sergio Vladimir Barreiro Degiorgi

Cabo de Santo Agostinho

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Sistema Integrado de Bibliotecas da UFRPE
Bibliotecário(a): Ana Catarina Macêdo – CRB-4 1781

C349s Castelo Branco, Lucas Martins
Sincronização de osciladores Colpitts operando em regime não-linear com acoplamentos uni e bi-direcional, com e sem atraso / Lucas Martins Castelo Branco. – Recife, 2024.

108 f.; il.

Orientador(a): Marcos Oriá.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Física, Recife, BR-PE, 2024.

Inclui referências e apêndice(s).

1. Sistemas dinâmicos 2. Osciladores 3. Acoplamentos
4. Dinâmica I. Oriá, Marcos, orient. II. Título

CDD 530

LUCAS MARTINS CASTELO BRANCO

Sincronização de osciladores Colpitts operando em regime não-linear com acoplamentos uni e bi-direcional, com e sem atraso

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Física, Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho, da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Física.

Data: 20 / 08 / 2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos Cesar Santos Oriá (Orientador)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Weliton Soares Martins (Examinador Interno)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Dr. Pablo Ariel Monzón Rangeloff (Examinador Externo)
Universidad de La República Uruguay

Dedico:

*aos meus pais, por me proporcionarem o caminho da educação;
à minha amada Joana, pelo amor, carinho e apoio diário; e
aos amigos e professores pelo incentivo e instrução.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha mais profunda gratidão às pessoas que, de diversas maneiras, contribuíram para a conclusão desta dissertação.

Primeiramente, agradeço aos meus pais, por todo o amor, apoio e incentivo incondicional ao longo da minha vida acadêmica. Vocês foram e sempre serão minha maior fonte de inspiração.

À minha amada Joana Lima, por sua paciência, carinho e compreensão nos momentos mais desafiadores. Sua presença constante foi um alicerce fundamental durante essa jornada.

Aos meus amigos e colegas de pesquisa, Guilherme Saatmam, Victor Adony, Giulia Perruci, Gilderlan e Silvana, por todos os debates enriquecedores, pela troca de ideias e pela parceria que tornou o caminho mais leve e colaborativo. Sou grato por cada conversa e incentivo.

Também agradeço aos servidores da Universidade Federal Rural de Pernambuco, que sempre estiveram disponíveis durante a execução dessa pesquisa.

Agradeço imensamente às professoras Martine e Amanda, pelo apoio e orientações que foram essenciais para o meu desenvolvimento acadêmico.

Por fim, deixo meu sincero agradecimento aos meus professores orientadores, Marcos Oriá e Sérgio Barreiro. Sua orientação, paciência e sabedoria foram cruciais para a construção deste trabalho. Vocês me ensinaram muito mais do que o conteúdo, me inspiraram a ser um pesquisador dedicado e curioso. Agradeço por me guiarem com maestria e por acreditarem no meu potencial desde o início.

A todos, o meu muito obrigado.

*"Ninguém educa ninguém, ninguém educa a si mesmo,
os homens se educam entre si, mediatizados pelo mundo."*

Paulo Freire

RESUMO

A sincronização é um fenômeno que permeia diferentes áreas como a física, a biologia e a engenharia, onde o acoplamento mútuo de osciladores resulta em efeitos dinâmicos coletivos. Descrever e caracterizar estes comportamentos é essencial para a compreensão de redes complexas. Partindo das equações diferenciais que regem estes sistemas, realizamos simulações numéricas e experiências para investigar a sua evolução temporal e funcionamento em regime caótico. Para uma análise mais abrangente é necessário considerar diferentes tipos de acoplamento, mecanismos e arquiteturas complexas de redes de osciladores. Neste trabalho investigamos a sincronização de osciladores tipo Colpitts operando em regime não-linear, explorando configurações de acoplamento unidirecional e bidirecional, com e sem a presença de atraso. Os osciladores Colpitts, conhecidos pela sua estrutura eletrônica simples e robusta, com grande estabilidade e ampla gama de frequência de funcionamento são examinados em detalhe através das suas equações de estado normalizadas e explorando seu regime caótico de funcionamento. Esta dissertação aborda a sincronização destes osciladores sob diferentes configurações de acoplamento, incluindo o acoplamento direto (ou linear), com uma linha de atraso entre os seus pares de osciladores. A formação de grupos sincronizados em redes de osciladores acoplados é discutida, demonstrando como a interconexão de múltiplos sistemas pode resultar em padrões coletivos emergentes. Por exemplo, ao introduzir atrasos entre vizinhos, observa-se a sincronização sem atrasos entre osciladores que não são primeiros-vizinhos, a chamada sincronização com atraso-zero. Os resultados obtidos com estes osciladores eletrônicos contribuem para a compreensão do fenômeno de sincronização à distância em sistemas caóticos, destacando o efeito de atraso-zero, cujos possíveis impactos são importantes em sistemas complexos, como as redes neuronais.

Palavras-chaves: Sistemas Dinâmicos, Dinâmica Não-Linear, Sincronização, Osciladores Colpitts, Acoplamento, Atraso, Clusters Sincronizados.

ABSTRACT

Synchronization is a phenomenon that permeates different areas such as physics, biology, and engineering, where the mutual coupling of oscillators results in collective dynamic effects. Describing and characterizing these behaviors is essential for understanding complex networks. Starting from the differential equations governing these systems, we perform numerical simulations and experiments to investigate their temporal evolution and operation in chaotic regimes. For a more comprehensive analysis, it is necessary to consider different types of coupling, mechanisms, and complex architectures of oscillator networks. In this work, we investigate the synchronization of Colpitts-type oscillators operating in a nonlinear regime, exploring unidirectional and bidirectional coupling configurations, with and without the presence of delay. The Colpitts oscillators, known for their simple and robust electronic structure, with great stability and wide frequency range, are examined in detail through their normalized state equations and exploring their chaotic operation regime. This dissertation addresses the synchronization of these oscillators under different coupling configurations, including direct (or linear) coupling, with a delay line between pairs of oscillators. The formation of synchronized groups in coupled oscillator networks is discussed, demonstrating how the interconnection of multiple systems can result in emerging collective patterns. For example, by introducing delays between neighbors, synchronization without delays between non-first-neighbor oscillators, called zero-delay synchronization, is observed. The results obtained with these electronic oscillators contribute to the understanding of the phenomenon of long-distance synchronization in chaotic systems, highlighting the zero-delay effect, whose possible impacts are important in complex systems such as neural networks.

Keywords: Dynamic Systems, Non-Linear Dynamics, Synchronization, Colpitts Oscillators, Coupling, Delay, Synchronized Clusters.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	SINCRONIZAÇÃO DE OSCILADORES ACOPLADOS	13
2.1	ACOPLAMENTO ENTRE OSCILADORES	13
2.1.1	Acoplamento Unidirecional	14
2.1.2	Acoplamento Bidirecional	15
2.2	FUNÇÕES DE ACOPLAMENTO EM SISTEMAS DINÂMICOS	15
2.2.1	Acoplamento direto	16
2.2.2	Acoplamento Linear	16
2.2.3	Acoplamento com Atraso	17
2.2.4	Outras funções de acoplamento	18
2.3	SINCRONIZAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES	19
2.3.1	Sincronização de Fase	19
2.3.2	Sincronização Generalizada	20
2.3.3	Sincronização com Atraso	21
3	MÉTODOS DE ANÁLISE DE OSCILADORES ACOPLADOS	23
3.1	DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO	23
3.2	MÉTODOS NUMÉRICOS	25
3.2.1	Runge-Kutta de Quarta Ordem	25
3.2.2	Método de Bogacki-Shampine	26
3.2.3	Correlação cruzada normalizada	27
3.2.4	Coefficiente de Determinação (R^2)	29
3.3	REDES DE OSCILADORES ACOPLADOS	30
3.3.1	Redes Regulares	32
3.3.2	Redes Randômicas	33
3.3.3	Redes de pequenos mundos (Small-World)	35
3.3.4	Redes sem escala	36
3.3.5	Redes Complexas	37
4	OSCILADOR ELETRÔNICO COLPITTS	40
4.1	SOLUÇÕES ESTACIONÁRIAS	44
4.2	EQUAÇÕES DE ESTADO NORMALIZADAS	46

4.3	COMPORTAMENTO CAÓTICO DO OSCILADOR COLPITTS	48
5	SINCRONIZAÇÃO	58
5.1	SINCRONIZAÇÃO COMPLETA POR ACOPLAMENTO DIRETO	58
5.2	SINCRONIZAÇÃO COMPLETA POR ACOPLAMENTO RESISTIVO	60
5.3	SINCRONIZAÇÃO COMPLETA COM ACOPLAMENTO ATRASADO	65
5.3.1	Acoplamento unidirecional com atraso	65
5.3.2	Três osciladores acoplados unidirecionalmente e com atraso	68
5.3.3	Sincronização por acoplamento bidirecional com atraso	71
5.3.4	Acoplamento com atrasos iguais entre osciladores Colpitts	72
5.3.5	Acoplamento com atrasos diferentes	75
6	FORMAÇÃO DE CLUSTER SINCRONIZADOS EM REDES DE OSCILADORES ACOPLADOS	76
6.1	OSCILADORES CONECTADOS EM CORRENTE: CLUSTERS SINCRONIZADOS	76
6.2	FORMAÇÃO DE CLUSTERS EM OSCILADORES CONECTADOS EM ANEL	79
7	SINCRONIZAÇÃO EXPERIMENTAL DE OSCILADORES COLPITTS	84
7.1	CIRCUITO ELETRÔNICO PARA O OSCILADOR COLPITTS	84
7.2	MÓDULO DE ATRASO	86
7.2.1	Atraso digital com conversores e um microcontrolador	86
7.2.2	Linha de transmissão com indutores e capacitores	88
7.2.3	Defasador de banda larga com amplificadores operacionais	88
7.3	SINCRONIZAÇÃO POR ACOPLAMENTO RESISTIVO ENTRE OSCILADORES COLPITTS	90
8	CONCLUSÃO	94
	REFERÊNCIAS	95
	APÊNDICE A – CÓDIGOS PARA SIMULAÇÃO DE OSCILADORES ACOPLADOS COM ATRASO	99

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos sistemas dinâmicos é um campo interdisciplinar que conecta conceitos de matemática aplicada a diversas áreas da física, química, biologia e engenharia. Um dos tópicos mais investigados nesse campo é a sincronização, em que dois ou mais sistemas oscilam de maneira coordenada. Esse fenômeno tem importantes aplicações tecnológicas, como em redes de comunicação, sistemas de potência e eletrônica.

A sincronização pode ser estudada em diversos elementos dinâmicos, um deles é o oscilador eletrônico do tipo Colpitts, que têm atraído atenção por seu comportamento não-linear e caótico, características que podem ser exploradas em aplicações como criptografia, geração de sinais complexos e controle de sistemas caóticos.

Esta dissertação investiga a sincronização de osciladores Colpitts, analisando inicialmente o comportamento isolado desses sistemas, seguido pela análise de seu comportamento coletivo em redes com diferentes topologias.

Primeiramente, são abordadas as diferentes formas de acoplamento entre osciladores, como acoplamentos unidirecionais e bidirecionais, como também as funções de acoplamento. Essas modalidades são exploradas no Capítulo 2, junto com as principais funções de acoplamento utilizadas em sistemas dinâmicos, como o acoplamento linear e com atraso.

Em seguida, o Capítulo 3 discute os métodos de análise desses sistemas acoplados. Além do diagrama de bifurcação, são apresentadas técnicas numéricas, como o método de Runge-Kutta de quarta ordem e o método de Bogacki-Shampine, além de métricas de sincronização, como a correlação cruzada normalizada e o coeficiente de determinação (R^2).

O comportamento do oscilador Colpitts, seu regime caótico e suas soluções estacionárias são analisados detalhadamente no Capítulo 4. Aqui, são introduzidas as equações de estado normalizadas, juntamente com o retrato de fase e o diagrama de bifurcação, que nos permite caracterizar o oscilador Colpitts e seus diferentes regimes de operação.

A análise da sincronização dos osciladores Colpitts acoplados é desenvolvida no Capítulo 5, onde se exploram diferentes configurações de acoplamento, como o aco-

plamento direto, resistivo e com atraso. Configurações unidirecionais e bidirecionais são examinadas em cenários com e sem atraso.

O estudo da formação de *clusters* sincronizados em redes de osciladores Colpitts é o foco do Capítulo 6, mostrando como as interconexões entre múltiplos osciladores podem resultar em padrões coletivos emergentes.

Por fim, no Capítulo 7, são apresentados os resultados experimentais obtidos, detalhando a implementação de circuitos eletrônicos, módulos de atraso e defasadores de banda larga, todos voltados para a sincronização dos osciladores Colpitts.

2 SINCRONIZAÇÃO DE OSCILADORES ACOPLADOS

A sincronização é um fenômeno amplamente observado na natureza e em sistemas artificiais, onde dois ou mais sistemas oscilatórios ajustam seus ritmos temporais devido a interação ou acoplamento adequado. Esse conceito, derivado do grego "sýn"(junto) e "chronos"(tempo), se aplica à sistemas que "compartilham um tempo comum"(Arenas et al., 2008).

Historicamente, a sincronização tem sido objeto de estudo desde os primórdios da física. Um dos primeiros exemplos documentados é o de Christiaan Huygens, no século XVII, que observou a sincronização de dois relógios de pêndulo pendurados na mesma parede (Strogatz, 2018; Pikovsky et al., 2001). Huygens percebeu que a interação mecânica através das vibrações da parede era suficiente para causar sincronização, observada apesar de cada relógio ter uma frequência ligeiramente diferente quando isolado. Desde então, o estudo da sincronização evoluiu, abrangendo desde sistemas periódicos simples até sistemas caóticos (Boccaletti et al., 2002; Strogatz, 2018).

No contexto dos osciladores eletrônicos, a sincronização pode ocorrer de várias formas dependendo do tipo de acoplamento presente, seja unidirecional ou bidirecional, e da presença ou ausência de atraso. Esses tipos de acoplamentos determinam como os osciladores interagem e ajustam suas frequências e fases. Por exemplo, dois sistemas caóticos inicialmente independentes, uma vez acoplados podem ter suas trajetórias tornadas idênticas ao longo do tempo devido a um acoplamento suficientemente forte, superando a tendência natural ao comportamento caótico independente (Maggio; Feo; Kennedy, 1999).

Nesse capítulo serão apresentados os tipos de acoplamento, o conceito de sincronização e seus principais tipos e alguns métodos de análise desses sistemas dinâmicos.

2.1 ACOPLAMENTO ENTRE OSCILADORES

O acoplamento entre osciladores é fundamental no processo de sincronização de sistemas dinâmicos, onde dois ou mais osciladores interagem de maneira que o com-

portamento de um influencia o comportamento dos outros. Este fenômeno é central para a compreensão de uma vasta gama de processos naturais e tecnológicos, que vão desde osciladores biológicos até circuitos eletrônicos e redes neurais.

Quando dois osciladores são acoplados, suas interações podem levar a uma coordenação dos seus ritmos. Essa interação pode ocorrer através de diversas formas de acoplamento com troca de energia, através de interações mecânicas ou de sinais elétricos, por exemplo. Dois dos tipos mais comuns de acoplamento são o acoplamento unidirecional e o acoplamento bidirecional.

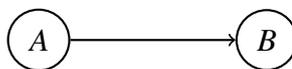
2.1.1 Acoplamento Unidirecional

No acoplamento unidirecional existe uma quebra de simetria. Um oscilador influencia outro, mas não há influência no sentido contrário (Pikovsky et al., 2001; Boccaletti et al., 2002). A Figura 1 ilustra esse acoplamento entre dois osciladores, A e B , de forma unidirecional. As equações 2.1 generaliza a descrição desse tipo de sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_A = \mathbf{f}(\mathbf{x}_A) \\ \dot{\mathbf{x}}_B = \mathbf{g}(\mathbf{x}_B) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde \mathbf{x}_A e \mathbf{x}_B representam vetores de estado n -dimensionais dos osciladores A e B , respectivamente, \mathbf{f} e \mathbf{g} são as funções dinâmicas intrínsecas dos osciladores, e $h(x_A, x_B)$ descreve a influência do oscilador A sobre B .

Figura 1 – Diagrama que representa o acoplamento unidirecional: o oscilador A que interfere no funcionamento de B , mas não há influência no sentido contrário.



Fonte: De autoria própria

Este tipo de acoplamento é comum em sistemas de controle do tipo malha aberta, onde um controlador ou *driver* (oscilador A) impõe sua dinâmica sobre um sistema controlado ou *response* (oscilador B), sem receber retorno (*feedback*) do sistema controlado.

2.1.2 Acoplamento Bidirecional

No acoplamento bidirecional, os osciladores se influenciam mutuamente. Este tipo de acoplamento é encontrado em muitos sistemas naturais e artificiais, como redes neurais, sistemas de comunicação e redes sociais (Pikovsky et al., 2001; Boccaletti et al., 2002). A Figura 2 representa esse tipo de acoplamento, ilustrado com dois osciladores, C e D . As equações 2.2 descrevem este sistema:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_C = \mathbf{f}(\mathbf{x}_C) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D) \\ \dot{\mathbf{x}}_D = \mathbf{g}(\mathbf{x}_D) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D) \end{cases} \quad (2.2)$$

Em que, \mathbf{x}_C e \mathbf{x}_D representam vetores de estado n -dimensionais dos osciladores, \mathbf{f} e \mathbf{g} são as funções dinâmicas intrínsecas de C e D , respectivamente; e $\mathbf{h}(\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D)$ e $\mathbf{K}(\mathbf{x}_C, \mathbf{x}_D)$ descrevem as influências mútuas.

Figura 2 – Diagrama que representa o acoplamento bidirecional: os osciladores C e D se influenciam mutuamente.



Fonte: De autoria própria

O acoplamento bidirecional é visto, por exemplo, no sistema cardiorrespiratório, em que a taxa do ritmo cardíaco e a respiração ajustam-se, como um sistema em malha fechada (*feedback*), em que entrada e saída formam um ciclo de realimentação, permitindo o controle e a estabilidade do sistema (Ottolina et al., 2023; Borovkova et al., 2022).

2.2 FUNÇÕES DE ACOPLAMENTO EM SISTEMAS DINÂMICOS

De acordo com a natureza do sistema, podem haver modificações na informação que é transmitida por meio do acoplamento de um oscilador ao outro. Essas modificações são descritas pelas funções de acoplamento que podem modificar desde a intensidade ou a forma do sinal de acoplamento, até introduzir atrasos na propagação da informação.

As funções de acoplamento em sistemas dinâmicos são cruciais para se determinar como osciladores e outros componentes interagem em uma rede. Essas funções podem ser classificadas de acordo com suas características e formas de interação. Nesta seção serão apresentadas algumas dessas funções.

2.2.1 Acoplamento direto

O acoplamento direto refere-se a uma forma específica de interação entre sistemas dinâmicos, e ocorre pela substituição de uma variável característica de um oscilador pela correspondente variável de outro oscilador (Pikovsky et al., 2001; Boccaletti et al., 2002). Considere dois osciladores descritos pelas equações diferenciais 2.3:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) + g(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f(x_2) + g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.3)$$

em que, a variável x_2 do segundo oscilador é substituída diretamente na função $g(x_1, x_2)$ que modula o comportamento do segundo oscilador. A influência de x_1 pode ser considerada como uma força externa aplicada a x_2 , modificando suas características como amplitude ou frequência de oscilação.

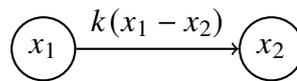
2.2.2 Acoplamento Linear

O acoplamento linear direto é o tipo mais simples de acoplamento, onde a influência de um oscilador sobre outro é proporcional à diferença entre suas amplitudes ou fases. Este tipo de acoplamento também é conhecido como resistivo e pode ser descrito pela seguinte equação:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) \\ \dot{x}_2 = f(x_2) + k(x_1 - x_2) \end{cases} \quad (2.4)$$

O termo $k(x_2 - x_1)$ na equação 2.4 para o oscilador x_2 , indica o acoplamento linear unidirecional, no qual k é a constante de acoplamento entre os osciladores x_1 e x_2 . A Figura 3 representa o acoplamento unidirecional entre os osciladores.

Figura 3 – Diagrama que representa o Acoplamento Linear.



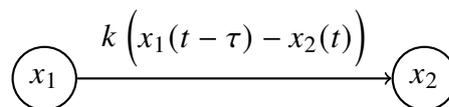
Fonte: De autoria própria.

Para o caso bidirecional, o termo linear seria também incluído na equação 2.4 para oscilador x_1 .

2.2.3 Acoplamento com Atraso

O acoplamento nunca é instantâneo, porém ele é dito acoplamento com atraso quando a influência de uma componente sobre outra tem atraso temporal suficientemente importante para ser determinante na oscilação resultante (Pikovsky et al., 2001; Fischer et al., 2006). Atrasos tipicamente surgem devido a fatores como a velocidade da propagação do sinal e/ou tempos de resposta inerentes aos componentes do sistema. Matematicamente, o atraso é representado por uma dependência temporal retardada nas equações que governam o sistema, podendo resultar em complexidade nos comportamentos dinâmicos das oscilações (Flunkert, 2011; Boccaletti et al., 2002).

Figura 4 – Diagrama que representa o acoplamento com atraso.



Fonte: De autoria própria.

De forma genérica a função de acoplamento de dois osciladores acoplados com atraso, está apresentado na Figura 4 e pode ser modelado linearmente pelo sistema de equações 2.5:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1) \\ \dot{x}_2 = g(x_2) + k(x_1(t - \tau) - x_2(t)) \end{cases} \quad (2.5)$$

Onde, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são as variáveis de estado dos dois osciladores, f e g são funções que descrevem a dinâmica dos osciladores e τ é o atraso temporal.

2.2.4 Outras funções de acoplamento

É fundamental reconhecer a diversidade e a complexidade dos diferentes tipos de acoplamento em sistemas dinâmicos. Essas funções especificam as diversas regras físicas que governam as interações e permitem a investigação detalhada das transições qualitativas dos estados dos sistemas envolvidos.

A Tabela 1 apresenta algumas funções de acoplamento junto a seu modelo matemático considerando um sistema $\dot{x} = f(x) + q(x, y)$.

Como exemplo, podemos citar o modelo para sinapse química, encontrada no sistema nervoso, que envolve a transmissão de sinais entre neurônios, através de neurotransmissores. Este processo é crucial para a comunicação neural e é fundamental para processos como a aprendizagem e a memória. Outro exemplo é o do acoplamento ambiental, que refere-se às interações entre sistemas mediados por um ambiente compartilhado. Nesse caso, o ambiente atua como um intermediário que influencia e é influenciado pelos sistemas acoplados. Esse tipo de acoplamento é comum em ecologia, onde diferentes espécies interagem através de um ambiente comum, como o ar, a água ou o solo.

Tabela 1 – Diferentes exemplos de funções de acoplamento h . Essas funções de acoplamento são consideradas em relação ao sistema $\dot{x} = f(x) + h(x, y)$

Tipo de CF	Modelo	Significado
Direto	$h(x, y) = h(y)$	Influência unidirecional ¹
Difusivo	$h(x, y) = h(y - x)$	Dependência da diferença de estado ²
Reativo	$h(x, y) = (\epsilon + i\beta)h(x - y)$	Força de acoplamento complexo ³
Conjugado	$h(x, y) = h(x - Py)$	P permuta as variáveis ⁴
Sinapse Química	$h(x, y) = g(x)S(y)$	S é uma sigmoide ⁵
Ambiental	$h(x, y) \approx \epsilon \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} [x(s) + y(s)] ds$	Dada por uma equação diferencial ⁶

Fonte: ¹(Aronson; Ermentrout; Kopell, 1990) ²(Kuramoto, 1984) ³(Cross et al., 2006) ⁴(Karnatak; Ramaswamy; Prasad, 2007) ⁵(Cosenza; Parravano, 2001) ⁶(Resmi; Ambika; Amritkar, 2011)

Estes exemplos ilustram apenas uma fração da vasta gama de mecanismos de acoplamento que existem. A compreensão detalhada dessas interações não só enriquece nosso conhecimento teórico, mas também abre caminhos para aplicações

práticas em várias áreas da ciência e tecnologia, permitindo o manejo de diversos processos complexos (Aronson; Ermentrout; Kopell, 1990; Kuramoto, 1984; Cross et al., 2006; Karnatak; Ramaswamy; Prasad, 2007; Cosenza; Parravano, 2001; Resmi; Ambika; Amritkar, 2011).

2.3 SINCRONIZAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

A capacidade de diferentes sistemas oscilarem em uníssono é crucial para a estabilidade e funcionamento de muitos processos naturais e tecnológicos (Mahmoodi et al., 2023; Totz; Olmi; Schöll, 2020; Mares; Solana; Assaneo, 2023; Goldbeter; Yan, 2022; Liu et al., 2021). Este capítulo examina os principais tipos de sincronização em regime caótico: sincronização de fase, sincronização generalizada, sincronização com atraso e sincronização com atraso zero (zero-lag). Cada seção aborda os conceitos teóricos, equações matemáticas, exemplos de aplicação e ocorrências na natureza.

2.3.1 Sincronização de Fase

A sincronização é dita de fase quando sistemas dinâmicos acoplados, mantêm uma relação fixa ou proporcional de suas fases, independentemente da coerência das amplitudes (Pikovsky et al., 2001). A sincronização de fase pode ser expressa matematicamente por meio das equações diferenciais apresentadas na Eq. 2.6, que descrevem o comportamento de dois osciladores acoplados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{cases} \quad (2.6)$$

Para esse sistema, \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 são os vetores de estado n-dimensionais para os osciladores 1 e 2, respectivamente. A sincronização de fase ocorre quando há uma relação constante entre as fases θ_1 e θ_2 dos osciladores, mesmo que as diferenças de amplitudes, entre \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 possam variar (Buscarino et al., 2011).

Uma técnica comum para analisar a sincronização de fase é observar o espaço de fase do sistema. Supondo que os osciladores tenham componentes periódicas, a fase θ de um oscilador pode ser definida em termos do argumento do componente

periódico. Assim, para os osciladores com frequência angular ω , as fases podem ser descritas pela equação 2.7:

$$\theta_i = \omega_i t + \phi_i \quad (2.7)$$

em que ϕ_i é a fase inicial do i -ésimo oscilador. A condição de sincronização de fase pode então ser expressa pela equação 2.8:

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{constante} \quad (2.8)$$

Em termos práticos, a sincronização de fase é observada em diversos sistemas naturais e artificiais. Exemplos incluem sistemas biológicos, como a sincronização dos batimentos cardíacos ou a respiração artificial, onde a coerência entre as fases de osciladores internos pode ser crítica para o funcionamento adequado do sistema. Na engenharia, sistemas de comunicação muitas vezes utilizam malhas de travamento de fase (*Phase-Locked Loop*, PLL) para manter a sincronização de fase entre sinais de entrada e saída (Hassan; Kumar; Pati, 2022; Strogatz, 2018; Peter; Leine, 2017; Zhao et al., 2020).

A análise matemática detalhada desses sistemas pode envolver técnicas de estabilidade, onde se investiga as condições sob as quais a sincronização de fase é estável. Um exemplo clássico é o uso de acoplamento linear com realimentação, onde a variação do ganho de acoplamento pode levar a transições de comportamento incoerente para sincronização em fase e, eventualmente, para sincronização generalizada (Boccaletti et al., 2002), que discutiremos na próxima seção.

2.3.2 Sincronização Generalizada

A sincronização generalizada ocorre quando sistemas dinâmicos, não necessariamente idênticos, ajustam suas dinâmicas de maneira a alcançar um comportamento comum devido a um acoplamento entre esses sistemas (Boccaletti et al., 2006).

Para descrever matematicamente a sincronização generalizada em sistemas acoplados, considera-se um par de sistemas dinâmicos representados por equações diferenciais ordinárias. Considere dois sistemas bidirecionalmente acoplados:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1) + h(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_2) + g(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.9)$$

onde x_1 e x_2 são os vetores de estado dos sistemas, f_1 e f_2 representam as dinâmicas individuais dos sistemas e as funções h e g representam o acoplamento entre os sistemas x_1 e x_2 .

A sincronização generalizada ocorre se existe uma função ψ , tal que:

$$x_2(t) = \psi(x_1(t)) \quad (2.10)$$

indicando que a evolução de $x_2(t)$ pode ser obtida a partir de $x_1(t)$.

Para caracterizar a sincronização generalizada por meio de uma função de erro, define-se a diferença entre os estados dos dois sistemas como o vetor de erro $\mathbf{e}(t)$:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}_2(t) - \psi(\mathbf{x}_1(t)) \quad (2.11)$$

A sincronização é alcançada se $e(t)$ tende a zero quando t cresce (tende ao infinito). Matematicamente, isso pode ser expresso como:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0 \quad (2.12)$$

Se $\mathbf{e}(t)$ converge para zero, então os sistemas estão sincronizados (Pikovsky et al., 2001; Gutierrez et al., 2013).

2.3.3 Sincronização com Atraso

A sincronização com atraso refere-se à condição em que dois ou mais sistemas dinâmicos, conectados através de interações com atraso, conseguem sincronizar suas dinâmicas em tempos diferentes, definidos pelo atraso. O atraso no acoplamento pode ser devido ao tempo de propagação da informação entre os sistemas, o que é comum em redes com conexões longas (Fischer et al., 2006; Rosenblum; Pikovsky; Kurths, 1997).

A sincronização com atraso pode ser descrita por um conjunto de equações diferenciais com termos de atraso. Considere dois osciladores acoplados cujas dinâmicas são descritas pelas equações:

$$\dot{x}_1(t) = f(x_1(t)) + K(x_2(t - \tau) - x_1(t)) \quad (2.13)$$

$$\dot{x}_2(t) = f(x_2(t)) + K(x_1(t - \tau) - x_2(t)) \quad (2.14)$$

onde τ representa o atraso no acoplamento, K define a intensidade de acoplamento e f descreve a dinâmica interna de cada oscilador (Boccaletti et al., 2002).

A sincronização ocorre quando os sistemas ajustam suas dinâmicas para que suas saídas se tornem idênticas mas uma atrasada em relação a outra. Isso pode ser formalizado pela condição $x_1(t) = x_2(t + \tau)$. A robustez da sincronização depende dos parâmetros do sistema, como o coeficiente de acoplamento K e o valor do atraso τ (Boccaletti et al., 2006).

Na natureza, a sincronização com atraso é observada em sistemas biológicos, como por exemplo, em redes neurais. Neurônios distantes podem sincronizar suas atividades através de sinapses, que introduzem atrasos na transmissão dos sinais. Essa sincronização é crucial para funções cognitivas e processamento de informações no cérebro (Boccaletti et al., 2002; Frasca et al., 2018). Outro exemplo ocorre em redes de lasers semicondutores acoplados, onde o atraso é devido ao tempo de propagação da radiação entre os lasers. Esses sistemas têm sido estudados experimentalmente e teoricamente, demonstrando que é possível obter sincronização isócrona, onde os lasers oscilam em fase apesar do atraso imposto no acoplamento (Fischer et al., 2006). A sincronização com atraso é um fenômeno importante em sistemas dinâmicos acoplados, com implicações significativas em áreas como neurociência e engenharia de sistemas. A compreensão dos parâmetros que influenciam essa sincronização permite a criação e controle de redes complexas que operam de maneira coordenada, mesmo na presença de atrasos inerentes às suas conexões (Boccaletti et al., 2006; Rosenblum; Kurths, 2003).

3 MÉTODOS DE ANÁLISE DE OSCILADORES ACOPLADOS

Para auxiliar no estudo de sistemas acoplados, será abordado nessa seção alguns métodos de análise utilizados nesta dissertação: estabilidade, mapas de bifurcações e técnicas numéricas.

Primeiramente, será apresentada a análise de bifurcação que nos auxilia a compreender as transições entre diferentes comportamentos dinâmicos dos osciladores não lineares. Os mapas de bifurcações revelam como alterações em parâmetros do sistema podem levar a mudanças qualitativas no comportamento dos osciladores, como a transição de regimes periódicos para caóticos.

Em seguida, serão discutidos os métodos numéricos, essenciais para a simulação e análise de sistemas não lineares, particularmente de osciladores acoplados. Esta seção abordará as técnicas de simulações computacionais, onde detalharemos o método de integração numérica Runge-Kutta, que é utilizado para resolver as equações diferenciais que governam sistemas aqui analisados.

3.1 DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO

Os diagramas de bifurcação são representações gráficas que exibem como os pontos fixos (ou soluções estacionárias), os comportamentos periódicos e caóticos de um sistema dinâmico mudam à medida que um parâmetro do sistema é variado. Esses diagramas são ferramentas visuais importantes para mapear as transições entre diferentes regimes dinâmicos e identificar os valores dos parâmetros para se operar em cada um deles, e suas zonas de transições. Em termos práticos, permite se escolher rapidamente um regime de operação do oscilador (Strogatz, 2018).

A estrutura de um diagrama de bifurcação consiste, geralmente, em dois eixos: o eixo horizontal, que representa o parâmetro de controle, e o eixo vertical, que representa o estado do sistema. O parâmetro de controle pode ser qualquer variável que influencie o comportamento do sistema, como a taxa de crescimento em um modelo populacional ou a força de acoplamento em um sistema de osciladores. O estado do sistema, por sua vez, é representado pelas possíveis soluções do sistema, geralmente os pontos fixos ou as amplitudes das oscilações (Strogatz, 2018).

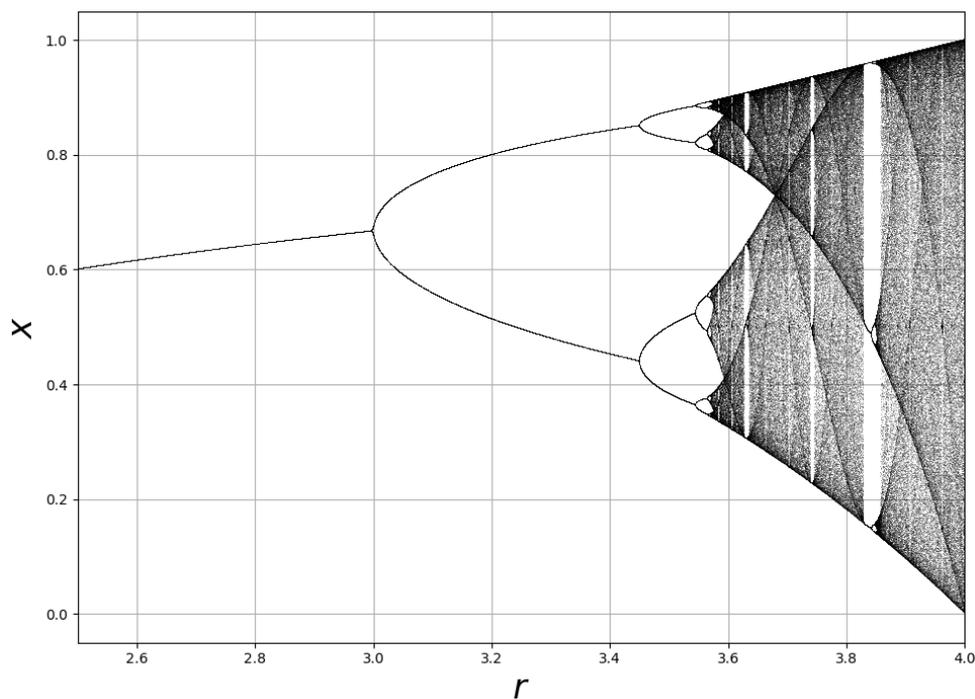
Para ilustrar o conceito, consideraremos a equação logística, Equação 3.1, um dos exemplos mais estudados em sistemas dinâmicos, a qual é uma equação de diferenças não-linear que modela o crescimento populacional:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (3.1)$$

Na equação 3.1, x_n representa a população normalizada no tempo n (com $0 \leq x_n \leq 1$) e r é o parâmetro de crescimento. O comportamento do sistema varia significativamente com r , e o diagrama de bifurcação nos permite visualizar essa variação (Strogatz, 2018; Flunkert, 2011).

A Figura 5 apresenta o diagrama de bifurcação para a equação logística, e nos apresenta visualmente para quais valores de r ocorrem as duplicações de período.

Figura 5 – Diagrama de bifurcação para a equação logística.



Fonte: De autoria própria.

Existem vários tipos de bifurcações, alguns dos mais comuns são: a bifurcação de saddlenode, onde dois pontos fixos (um estável e outro instável) colidem e se aniquilam; a bifurcação de pitchfork, onde um ponto fixo se divide em três (um permanece e outros dois aparecem); a bifurcação de Hopf, onde um ponto fixo estável se torna instável e uma oscilação periódica (ciclo limite) emerge; e a bifurcação de período-

dobramento, onde um ciclo limite se torna instável e um novo ciclo limite com o dobro do período original aparece, indicando o caminho para o caos (Strogatz, 2018).

Embora a equação logística seja um exemplo clássico, diagramas de bifurcação podem ser criados para análise de outros sistemas dinâmicos não-lineares.

3.2 MÉTODOS NUMÉRICOS

Como observado na seção anterior, a visualização e investigação de comportamentos complexos são difíceis de analisar analiticamente, tornando o uso de computadores essenciais nesse campo. Nesta seção abordaremos os métodos numéricos utilizados para o estudo de osciladores acoplados para esta dissertação.

3.2.1 Runge-Kutta de Quarta Ordem

Entre os métodos mais comuns para solucionar equações diferenciais está o método de Runge-Kutta de quarta ordem (Frasca et al., 2018), que calcula a próxima posição de um sistema usando avaliações ponderadas da função de derivada em diferentes pontos dentro de um intervalo de tempo.

Esse método oferece uma solução aproximada para uma EDO do tipo $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ com precisão muito maior que métodos mais simples, como o de Euler. A rotina numérica é executada através do seguinte conjunto de variáveis:

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (3.2)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (3.3)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (3.4)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \quad (3.5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (3.6)$$

Onde, t_n é o ponto no tempo atual, y_n é o valor da solução no tempo t_n e h é o passo de integração.

A precisão desse método vem do uso de várias estimativas intermediárias (as k_i acima, equações 3.2-3.5) para calcular a inclinação média. Nessa técnica resulta, por exemplo, um erro global de ordem $O(h^4)$, onde h é o passo de integração. A ser comparado com o erro de ordem $O(h^2)$ do método de Euler (Flunkert, 2011; Frasca et al., 2018).

O método, além de preciso, é também relativamente fácil de implementar. Essa combinação de precisão e facilidade de implementação faz dele uma escolha popular para a resolução de equações diferenciais ordinárias em uma ampla gama de aplicações científicas e de engenharia.

3.2.2 Método de Bogacki-Shampine

Em alguns sistemas dinâmicos, ocorrem atrasos na propagação do sinal, como por exemplo, em redes formadas por neurônios em nosso sistema nervoso. Esses elementos são fundamentais e responsáveis pela transmissão de sinais elétricos e químicos. Na função sináptica, ocorre um atraso associado aos mecanismos de liberação e recepção de neurotransmissores. Esse atraso tem influência na transmissão de impulsos entre neurônios, adicionando complexidade ao sistema neural.

O atraso pode ser descrito por meio de um parâmetro τ que na equação diferencial introduzirá uma diferença no tempo t para certas variáveis. Esse tipo de equação é conhecida por Equação diferencial com atraso (*Delay Differential Equations - DDEs*), e são um tipo de equação diferencial onde a taxa de variação de uma variável depende não apenas de seu valor atual, mas também de valores em tempos anteriores, ou seja, $\dot{X}(t) = f(t, X(t), X(t - \tau))$.

Para solucionar numericamente esse tipo de equação, é necessário modificar o método Runge-Kutta. Uma modificação, conhecida como método de Bogacki-Shampine (Flunkert, 2011) inclui equações de interpolação intermediárias descritas pelas equações 3.7 e 3.8:

$$X_{\text{interp}}(t_n - \tau + \frac{1}{2}h) = \frac{h}{8} [X'(t_{n-\nu}) - X'(t_{n+1-\nu})] + \frac{1}{2} [X(t_{n-\nu}) + X(t_{n+1-\nu})] \quad (3.7)$$

$$X_{\text{interp}}(t_n - \tau + \frac{3}{4}h) = \frac{h}{64} [3X'(t_{n-\nu}) - 9X'(t_{n+1-\nu})] + \frac{1}{32} [5X(t_{n-\nu}) + 27X(t_{n+1-\nu})] \quad (3.8)$$

Nas equações 3.7 e 3.8 utiliza-se a notação $t_n - \tau = t_{n-\nu}$, e a DDE, $\frac{d}{dt}X(t) = f(t, X(t), X(t - \tau))$, pode ser calculada através do algoritmo a seguir:

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (3.9)$$

$$k_1 = f(t_n, X_n, X_{n-\nu}) \quad (3.10)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{1}{2}h, X_n + \frac{1}{2}hk_1, X_{\text{interp}}(t_{n-\nu} + \frac{1}{2}h)\right) \quad (3.11)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{3}{4}h, X_n + \frac{3}{4}hk_2, X_{\text{interp}}(t_{n-\nu} + \frac{3}{4}h)\right). \quad (3.12)$$

$$X_{n+1} = X_n + h\frac{1}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3) \quad (3.13)$$

Onde, t_n é o ponto atual no tempo, X_n é o valor da solução no ponto t_n e h é o passo de integração.

3.2.3 Correlação cruzada normalizada

Para se comparar sinais de sistemas dinâmicos atrasados, uma importante ferramenta utilizada nessa dissertação é a correlação cruzada normalizada. Essa função permite visualizar e analisar como atrasos afetam a dinâmica geral (Mulet et al., 2003).

Podemos definir a função de correlação cruzada para duas séries temporais $x(t)$ e $y(t)$, por meio da equação:

$$R_{xy}(\tau) = \sum_t x(t)y(t + \tau) \quad (3.14)$$

Em 3.14, τ representa o atraso aplicado à série $y(t)$. A correlação cruzada mede então a similaridade entre $x(t)$ e $y(t)$ deslocada por τ , permitindo identificar padrões e sincronia entre os sinais.

Para que possamos comparar a correlação entre diferentes sinais com maior facilidade, é necessário normalizar a função de correlação cruzada, dada pela equação:

$$C_{xy}(\tau) = \frac{\langle x(t)y(t + \tau) \rangle}{\sqrt{\langle x^2(t) \rangle \langle y^2(t) \rangle}} \quad (3.15)$$

Em que $x(t)$ e $y(t)$ são os sinais analisados e $\langle \cdot \rangle$ representa o valor médio.

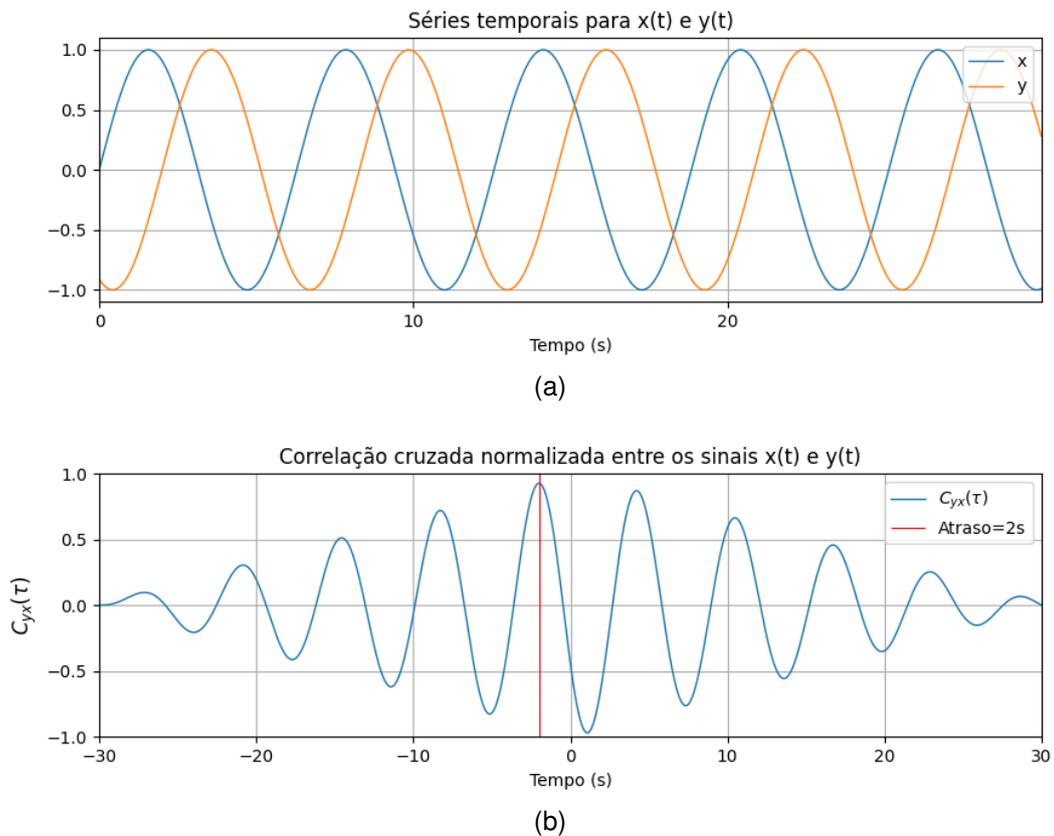
Da definição 3.15, $C_{xx}(0)$ e $C_{yy}(0)$ são as autocorrelações com atraso zero dos sinais $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente.

Para melhor entendermos a medida de correlação cruzada vamos considerar dois sistemas com comportamentos bem simples de função seno. Consideraremos seja dois sistemas independentes atrasados por meio da variável τ . Vamos definir as equações diferenciais que governam os sistemas como:

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(t - \tau) \end{cases} \quad (3.16)$$

Para analisar a relação entre os sinais $x(t)$ e $y(t)$, foram calculadas as séries temporais e a correlação cruzada normalizada. A Figura 6 a) mostra as formas de onda dos sinais em questão, enquanto a Figura 6 b) apresenta o gráfico da correlação cruzada. O ponto de máximo da correlação cruzada, indicado pela linha vertical vermelha, corresponde ao instante de tempo em que a similaridade entre os sinais é máxima.

Figura 6 – (a) Séries temporais dos sinais $x(t)$ e $y(t)$, e a correlação cruzada entre eles.



Fonte: Autoria própria.

Entre as diversas medidas existentes para análise de series temporais, a correlação cruzada é mais indicada para caracterizar a sincronização com atraso entre sistemas dinâmicos, pois detecta o atraso específico em que a correlação é máxima entre as séries temporais. Já outras medidas, não levam em conta o atraso em sua análise, não permitindo a comparação adequada entre os sistemas. O coeficiente de determinação R^2 , por exemplo, assume uma relação linear e é uma medida estática, não sendo apropriado nesse contexto.

3.2.4 Coeficiente de Determinação (R^2)

O coeficiente de determinação, representado por R^2 , é uma métrica utilizada em estatística para avaliar a qualidade de modelos de regressão. Esse coeficiente mede a proporção da variância na variável dependente que é explicada pelas variáveis independentes do modelo. Em termos matemáticos, o R^2 é definido pela equação 3.17:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} \quad (3.17)$$

onde y_i são os valores observados da variável dependente, \hat{y}_i são os valores previstos pelo modelo de regressão e \bar{y} é a média dos valores observados da variável dependente.

Os valores de R^2 variam entre 0 e 1, em que 0 indica que o modelo não explica nenhuma variação nos dados, enquanto um resultado próximo de 1 indica que o modelo explica toda a variação nos dados. Valores intermediários indicam a proporção da variância explicada pelo modelo. Por exemplo, um R^2 de 0,75 sugere que 75% da variância na variável dependente é explicada pelo modelo. Um R^2 alto geralmente indica um bom ajuste do modelo aos dados, enquanto um R^2 baixo pode sugerir a necessidade de um modelo diferente ou a inclusão de variáveis adicionais.

Embora o R^2 seja geralmente entendido como variando de 0 a 1, em alguns casos específicos, ele pode assumir valores negativos. Para que o R^2 seja negativo, a soma dos quadrados dos resíduos ($\sum (y_i - \hat{y}_i)^2$) deve ser maior que a soma dos quadrados totais ($\sum (y_i - \bar{y})^2$).

O R^2 é uma ferramenta útil para avaliar a qualidade de um modelo de regressão, proporcionando uma medida intuitiva da proporção da variância explicada pelo modelo. Em associação com outras métricas estatísticas, o R^2 pode auxiliar para avaliar a relação entre duas séries temporais, se estão sincronizadas, ajustadas entre si, ou então não relacionadas.

3.3 REDES DE OSCILADORES ACOPLADOS

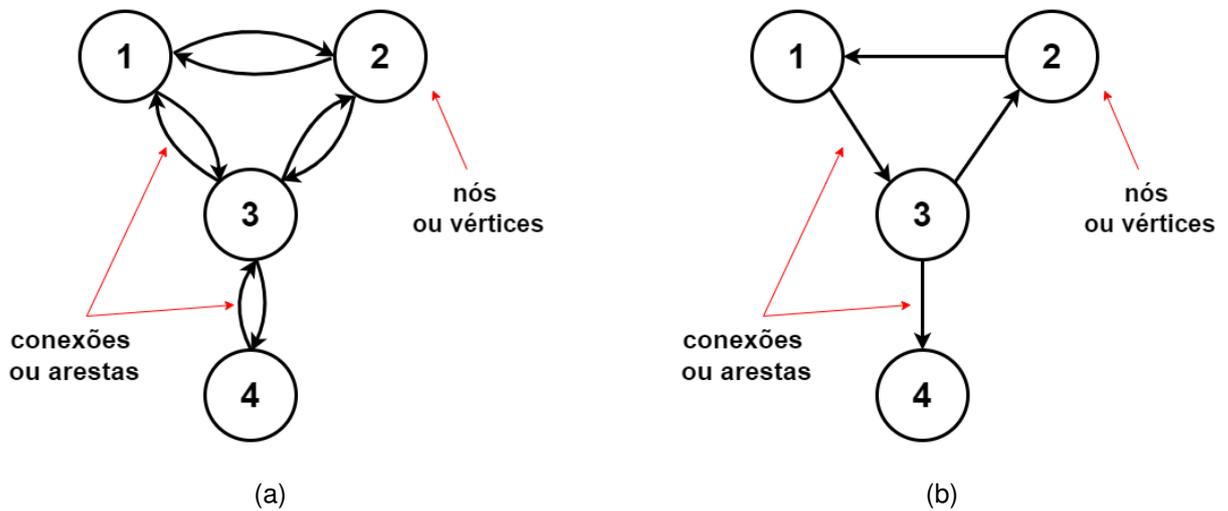
A análise de redes tem se tornado uma área de relevância científica, evoluindo de modelos regulares para estruturas complexas, abrangendo diversas disciplinas, como a física, biologia, sociologia e ciência da computação (Lehnert et al., 2016).

Pode-se dizer que as redes são estruturas matemáticas usadas para modelar uma ampla variedade de sistemas que possuem componentes interconectados nos permitindo codificar relacionamentos entre pares de objetos. Desde a distribuição de energia elétrica e redes de transporte até interações sociais e sistemas biológicos, as redes fornecem uma estrutura poderosa para entender como as partes de um sistema in-

teragem para produzir comportamentos coletivos complexos (Quiroga; Kreuz; Grassberger, 2002; Strogatz, 2003). Essencialmente uma rede é composta por N nós (ou vértices) e L conexões (ou arestas) que representam como é a interação entre os nós .

Essa interação pode ser dirigida, quando um nó relaciona-se com outro apenas em uma determinada direção ou não dirigida, quando a relação independe ocorre não necessariamente em uma direção determinada. A Figura 7 ilustra os casos para uma rede com 4 nós e 4 conexões.

Figura 7 – Exemplos de uma rede composta de 4 nós e 4 conexões em que a) é uma rede não dirigida e b) é uma rede dirigida.



Fonte: Autoria própria.

As redes podem ser representadas por uma matriz de adjacência C_{ij} em que:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe uma conexão entre o nó } j \text{ e o nó } i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.18)$$

Por exemplo, para a Figura 7 a), em que a rede é não dirigida, a matriz adjacência é dada por $A_{\text{não dirigida}}$ da Equação 3.19, em que cada termo a_{ij} da matriz é igual a 1 se existe ligação entre o nó i e o nó j . Já para o caso da rede dirigida, apresentada na Figura 7 b), as conexões são apresentadas na matriz com peso 1 apenas para os casos em que existe ligação na direção de um nó ao outro, como apresenta a matriz A_{dirigida} na Equação 3.19.

$$A_{\text{n\~{a}o dirigida}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{\text{dirigida}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Apesar da matriz adjac\~{e}ncia descrever bem a topologia de uma rede, em redes que descrevem o mundo real, \~{e} comum que esses links possuam pesos menores ou maiores do que 1, ou at\~{e} mesmo sejam fun\~{c}\~{o}es de acoplamento como visto no capitulo anterior. Com essa representa\~{c}\~{a}o matem\~{a}tica da estrutura da rede, \~{e} poss\~{i}vel obter uma vasta gama de medidas estruturais de rede, tais como: grau de distribu\~{c}~{a}o, coeficiente de agrupamento, comprimento do caminho mais curto, centralidade, etc (Lehnert et al., 2016).

As redes tamb\~{e}m podem ser descritas segundo suas caracter\~{i}sticas em fun\~{c}~{a}o do tempo. Caso a rede apresente mudan\~{c}as no n\~{u}mero de links ou n\~{o}s durante a sua evolu\~{c}~{a}o temporal, essa rede \~{e} dita din\~{a}mica, caso contr\~{a}rio \~{e} est\~{a}tica. Apesar de na vida real a maior parte das redes sejam din\~{a}micas, podemos analisar algumas delas como est\~{a}ticas em um intervalo de tempo em que as varia\~{c}~{o}es nos n\~{u}meros de n\~{o}s e links sejam inexistentes ou desprez\~{i}veis(Lehnert et al., 2016).

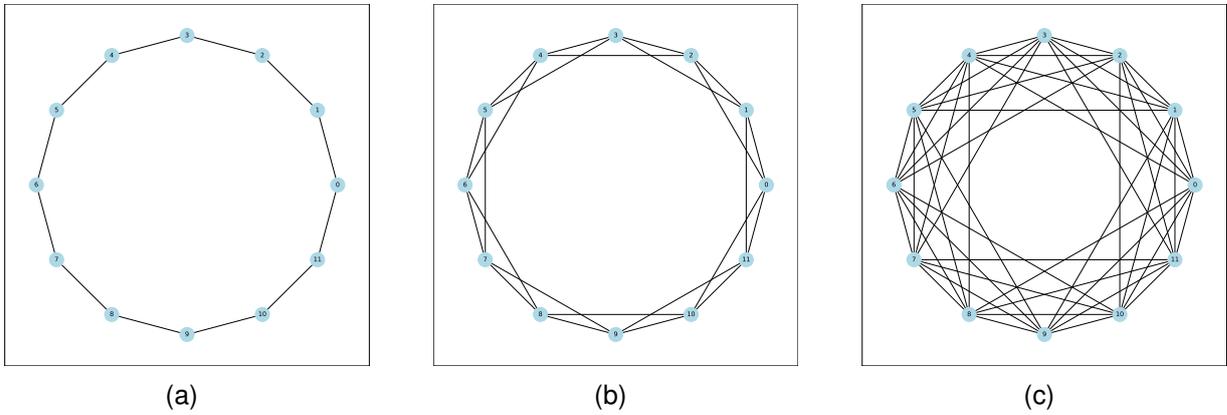
Neste cap\~{i}tulo, apresentamos especificamente na topologia das redes, seus principais tipos e comportamentos.

3.3.1 Redes Regulares

Redes regulares s\~{a}o estruturas nas quais cada n\~{o} est\~{a} conectado a um n\~{u}mero fixo de vizinhos com a mesma intensidade. Isso significa que todas as conex\~{o}es na rede s\~{a}o distribu\~{i}das de maneira uniforme, criando uma estrutura altamente organizada e sim\~{e}trica. Existem diferentes formas de redes regulares, mas todas compartilham essa caracter\~{i}stica de uniformidade na conectividade (Quiroga; Kreuz; Grassberger, 2002; Strogatz, 2003; Lehnert et al., 2016). Uma das redes regulares bastante interessante \~{e} a rede regular em anel. Nesse tipo de rede, cada n\~{o} est\~{a} acoplado com igual intensidade ao seus k vizinhos mais pr\~{o}ximos no anel para a esquerda e direita (Lehnert et al., 2016). A Figura 8 apresenta uma rede regular em anel formada por 12

nós para diferentes valores de grau para os nós.

Figura 8 – Rede regular em anel com 12 nós para grau com valor a) $k = 2$, b) $k = 4$ e c) $k = 8$.



Fonte: Autoria própria.

A matriz de adjacência de um anel regular $R_{N,K}$, em que N é o número de nós e K são os nós vizinhos pode ser descrita na seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & \dots & c_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

em que $c_k = 0$ se $\pm k \bmod N > K$ ou $k = 0$, caso contrário $c_k = 1$.

Na equação 3.20, o uso de $\bmod n$ garante que, ao conectar o nó 0 ao nó 5, a rede mantém sua estrutura circular. Esse tipo de rede é o ponto de partida para a construção de redes mundos pequenos (*small-worlds networks*) e apresentam comportamentos particularmente interessantes, como o estado quimera (*chimera state*) para certas condições, em que os nós da rede se dividem em dois grupos com comportamentos distintos, como por exemplo, coerência espacial e comportamento coerente ou oscilações coerentes e incoerentes (Lehnert et al., 2016; Strogatz, 2003).

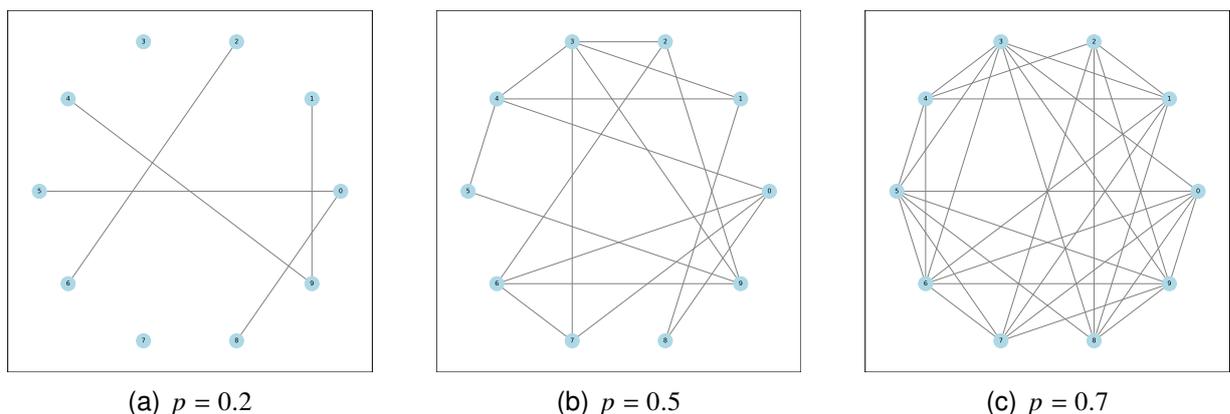
3.3.2 Redes Randômicas

Inicialmente as redes complexas foram pensadas como altamente aleatórias, em que tanto as conexões como os nós são estabelecidas de maneira randômica. Esse

conceito foi inicialmente introduzido por Erdős e Rényi (Erdos; Rényi et al., 1960), e é usado para modelar sistemas em que as conexões não seguem um padrão específico e são distribuídas de forma estocástica. Essas redes são fundamentais para compreender a transição entre ordem e desordem em um sistema complexo, permitindo determinar a robustez e a resiliência de redes frente a falhas aleatórias ou ataques direcionados (Quiroga; Kreuz; Grassberger, 2002; Newman, 2010; Barabási, 2012). Em muitos sistemas reais, como a internet ou redes sociais, as conexões são essencialmente aleatórias, tornando este modelo altamente relevante.

No modelo clássico de Erdős-Rényi, a rede randômica com N vértices e n conexões é formada através da escolha uniformemente aleatória entre todas as $0 \leq n \leq \frac{N(N-1)}{2}$ conexões possíveis com probabilidade entre $0 < p < 1$. A Figura 9 apresenta uma rede randômica com 12 nós modificando-se o valor da probabilidade p .

Figura 9 – Rede randômica de Erdős-Rényi com 12 nós para diferentes valores de probabilidade p a) $p = 0.2$, b) $p = 0.5$ e c) $p = 0.7$.



Fonte: Autoria própria.

No entanto, em muitos outros aspectos, a rede randômica é um modelo inadequado para redes do mundo real. Seu coeficiente de agrupamento é muito baixo à medida que o número de nós aumenta, enquanto redes reais geralmente apresentam altos coeficientes de agrupamento. Além disso, diferentemente das redes reais, a rede randômica tem uma distribuição de conexões que segue uma distribuição de Poisson, mas não possui estrutura de comunidades nem tendência de conexão entre nós semelhantes (Newman, 2010; Barabási, 2012).

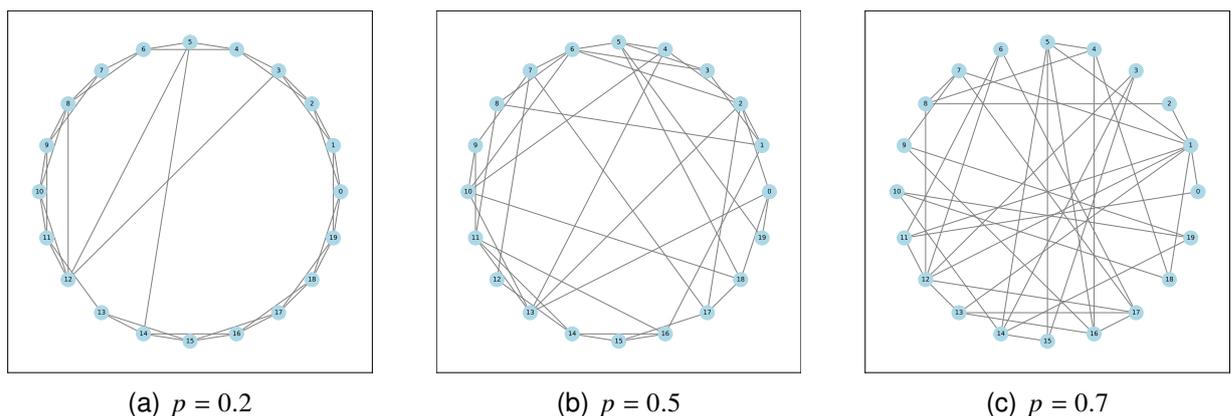
3.3.3 Redes de pequenos mundos (Small-World)

Duncan Watts e *Steven Strogatz*, em 1998, identificaram que algumas redes do mundo real possuem estruturas cíclicas de três nós. Esta descoberta indicou que essas redes nem são totalmente regulares e nem totalmente aleatórias (Watts; Strogatz, 1998).

Redes de pequenos mundos combinam a estrutura regular com a aleatoriedade, resultando em uma rede que tem um alto coeficiente de agrupamento e uma curta distância média entre os nós. Elas são encontradas em muitas redes reais, como redes sociais, redes biológicas e a internet, onde há agrupamentos locais com algumas conexões de longo alcance que encurtam as distâncias globais (Lehnert et al., 2016; Newman, 2010; Barabási, 2012).

Para criar uma rede desse tipo começa-se com uma rede regular que possui um alto coeficiente de agrupamento, em seguida algumas arestas são conectadas aleatoriamente com uma probabilidade p , como nas redes aleatórias. A Figura 10 apresenta uma rede de pequenos mundos formada por 20 nós para valores diferentes de probabilidade p para as conexões.

Figura 10 – Rede de pequenos mundos com 20 nós para diferentes valores de probabilidade p a) $p = 0.1$, b) $p = 0.3$ e c) $p = 0.7$.



Fonte: Autoria própria.

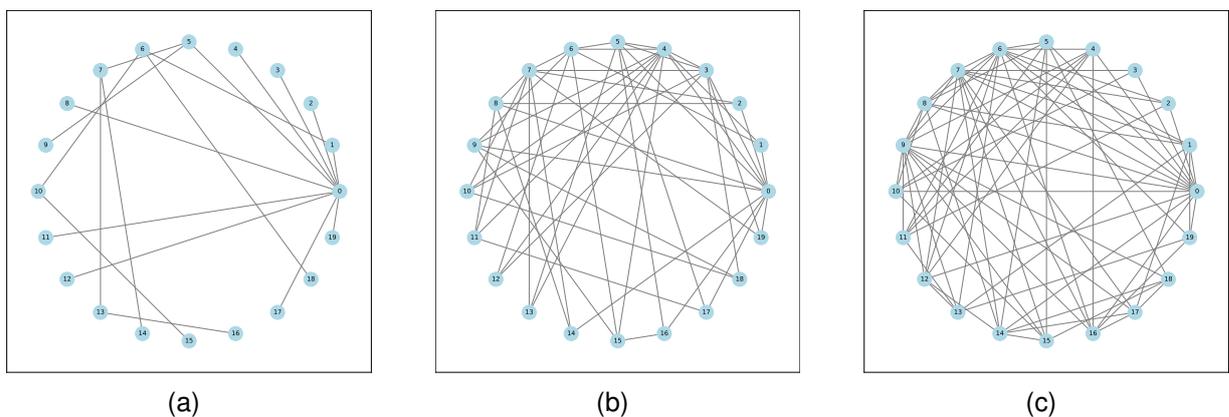
A relevância das redes de pequenos mundos está em sua capacidade de capturar a eficiência de propagação e robustez de redes reais, combinando um alto coeficiente de agrupamento com um pequeno comprimento de caminho mais curto (Barabási, 2012).

3.3.4 Redes sem escala

Existem dois aspectos das redes reais que não são considerados nos modelos aleatórios e de pequenos mundos. Primeiro, esses modelos possuem um número fixo de vértices N que podem ser conectados ou reconectados sem alterar N . Porém, as redes reais são dinâmicas e novos nós são adicionados ao longo do tempo. Os modelos de redes aleatórias assumem que a probabilidade de conexão entre dois pontos é aleatória e par, enquanto a maioria das redes reais apresentam probabilidades maiores para determinadas conexões (Lehnert et al., 2016).

As redes do tipo sem escala (*Scale-Free Networks*) são caracterizadas por uma distribuição de grau que segue uma lei de potência, ou seja, poucos nós têm muitas conexões e são denominados centros ou *hubs* enquanto a maioria dos nós tem poucas conexões. Portanto, a probabilidade de que uma conexão seja realizada a um nó que já possua várias conexões é maior em comparação à um nó que não possua conexões, por exemplo. Essas redes foram introduzidas por *Barabási e Albert* e são comuns em sistemas naturais e artificiais, como a internet, redes sociais e redes metabólicas. A presença de *hubs* torna essas redes altamente robustas a falhas aleatórias, mas vulneráveis a ataques direcionados (Barabási, 2012). A Figura 11 apresenta uma rede livre de escala formada por 20 nós modificando-se o grau mínimo do nó d a) $d = 1$, b) $d = 3$ e c) $d = 5$.

Figura 11 – Redes livres de escala (*Scale-Free Networks*) com 20 nós modificando-se o grau mínimo do nó d a) $d = 1$, b) $d = 3$ e c) $d = 5$.



Fonte: Autoria própria.

A forma matemática da lei de potência para a distribuição de grau $P(k)$ em uma rede sem escala é:

$$P(k) \sim k^{-\gamma} \quad (3.21)$$

Onde, $P(k)$ é a probabilidade de um nó ter k conexões (ou grau k), k é o número de conexões do nó e γ (gama) é o expoente da lei de potência, que é um parâmetro positivo característico da rede.

Isso nos indica que o número de nós com um determinado grau k decresce como uma potência de k . Em outras palavras, há muitos nós com poucos graus e poucos nós com muitos graus, formando uma distribuição que é frequentemente observada em redes reais como a internet, redes sociais, e muitas outras redes naturais e artificiais com a presença de *hubs*. Em redes sem escala, o valor típico do expoente γ está entre 2 e 3, o que é consistente com muitas redes reais observadas (Barabási, 2012).

3.3.5 Redes Complexas

O termo redes complexas se refere a grafos com características topológicas não triviais formadas por um grande número de constituintes que interagem de forma não linear entre si e o ambiente criando estruturas dinâmicas muitas vezes imprevisíveis (Barabási, 2012). Essas redes combinam características de diferentes tipos de redes, como regularidade, aleatoriedade, pequenos mundos e sem escala, para modelar sistemas reais complexos. Redes complexas são encontradas em diversas áreas, incluindo biologia, física, ciência da computação e ciências sociais, onde a complexidade das interações demanda uma abordagem holística para entender a dinâmica e a evolução do sistema.

Alguns exemplos de redes complexas:

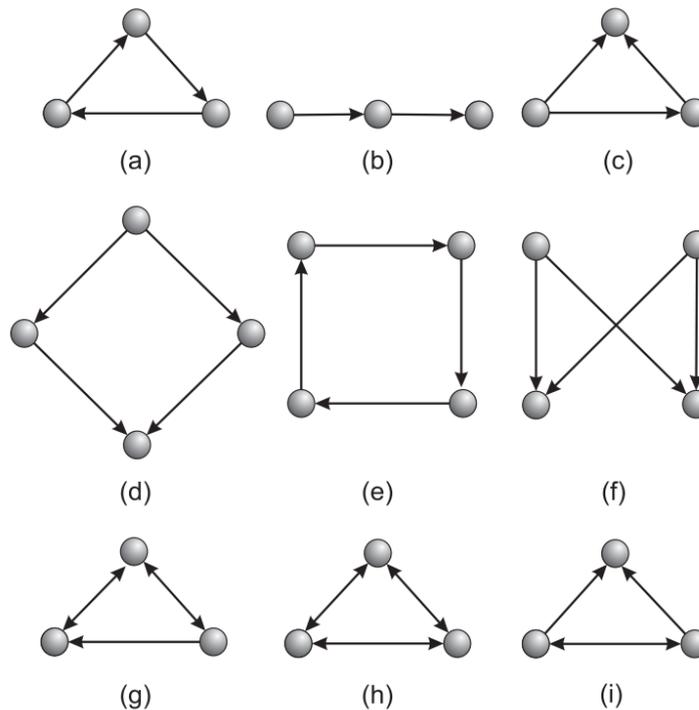
- **Sociedade:** A sociedade humana é um exemplo de rede complexa onde bilhões de indivíduos interagem através de laços profissionais, de amizade e familiares. Essas interações são essenciais para o funcionamento coeso da sociedade.
- **Infraestruturas de Comunicação:** As infraestruturas de comunicação, que integram bilhões de telefones celulares, computadores e satélites, são redes complexas. Estas redes são responsáveis por capturar as interações entre dispositivos de comunicação, incluindo conexões de internet e links sem fio.

- Cérebro Humano: O cérebro humano opera como uma rede complexa onde bilhões de neurônios se conectam e interagem, permitindo a atividade coerente necessária para a cognição e o raciocínio.
- Sistemas Biológicos: Dentro das células vivas, redes descrevem as interações entre genes, proteínas e metabólitos, integrando os processos biológicos essenciais para a vida.
- Redes de Energia: A rede elétrica, composta por geradores e linhas de transmissão, é uma rede complexa que fornece energia a quase toda a tecnologia moderna.
- Redes de Comércio: As redes de comércio global facilitam a troca de bens e serviços, contribuindo para a prosperidade econômica e também desempenhando um papel crucial na disseminação de crises financeiras e econômicas.

Por conta do caráter genérico e multidisciplinar, a ciência das redes complexas é estudada por diversas áreas de pesquisa com diversas aplicações. Pois compreender a sua estrutura e funcionamento pode revelar como se dá sua dinâmica nos permitindo solucionar problemas em diversos campos do conhecimento (Strogatz, 2003; Barabási, 2012).

Outro aspecto importante em redes complexas é a presença de *Motifs* ou motivos, que são padrões recorrentes de interconexões entre nós em uma rede complexa. Eles representam subestruturas que aparecem com frequência maior do que seria esperado ao acaso e são considerados os blocos de construção fundamentais das redes complexas. A identificação e análise de motivos ajudam a entender as propriedades estruturais e funcionais de redes complexas (Rodrigues, 2007). A Figura 12 apresenta alguns exemplos de motivos.

Figura 12 – Exemplos de motivos: (a) three-vertex feedback, (b) three chain, (c) feed-forward loop, (d) bi-parallel, (e) four-vertex feedback, (f) bi-fan, (g) feedback with two mutual dyads, (h) fully connected triad e (i) uplinked mutual dyad.



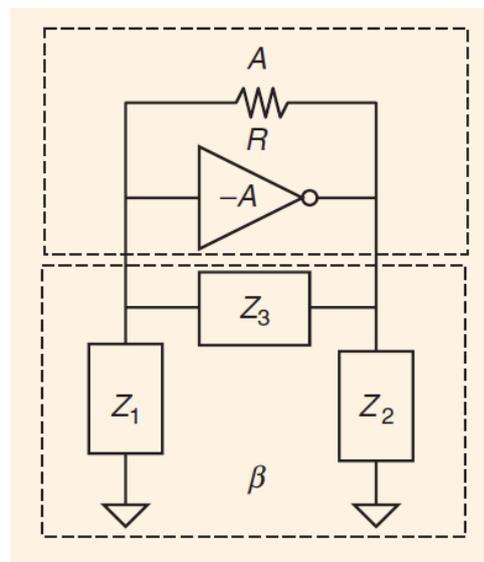
Fonte: (Rodrigues, 2007)

As principais características de um motivo são a recorrência, as subestruturas pequenas e a importância funcional. Motivos são detectados repetidamente em uma rede, indicando sua importância estrutural e funcional e geralmente, consistem de um pequeno número de nós (por exemplo, três a cinco), mas suas configurações podem ter um impacto significativo na dinâmica da rede. Em redes neurais por exemplo, motivos podem refletir padrões de conectividade que facilitam a transmissão eficiente de informações ou a coordenação de atividades neuronais (Rodrigues, 2007).

4 OSCILADOR ELETRÔNICO COLPITTS

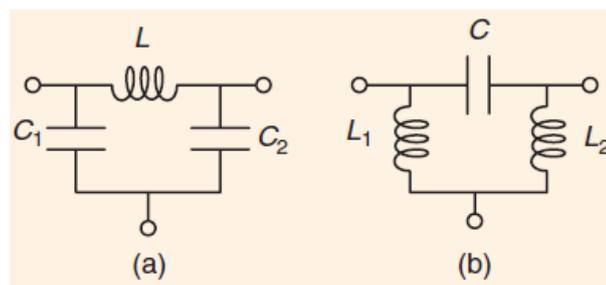
O oscilador Colpitts foi proposto por Edwin H. Colpitts em fevereiro de 1918 (Colpitts, 1927), provavelmente como uma modificação do oscilador Hartley (Hartley, 1920). Esses osciladores foram os primeiros a utilizar um único tubo de vácuo, o que constituía em importante vantagem na época, visto que esses dispositivos são volumosos e consomem bastante energia. Esses osciladores, tornam-se então mais compactos, econômicos e simples dos que os já existentes à época (Azadmehr; Paprotny; Marchetti, 2020).

Figura 13 – Modelo generalizado para um oscilador Colpitts ou Hartley, onde o estágio de ganho (A) pode ser inversor ou não-inversor, a depender da configuração do circuito tanque formado pelos elemento Z_1 , Z_2 e Z_3 , em que β representa o ganho de realimentação do tanque.



Fonte: (Azadmehr; Paprotny; Marchetti, 2020)

Figura 14 – Circuito tanque na configuração a) Colpitts e b) Hartley.



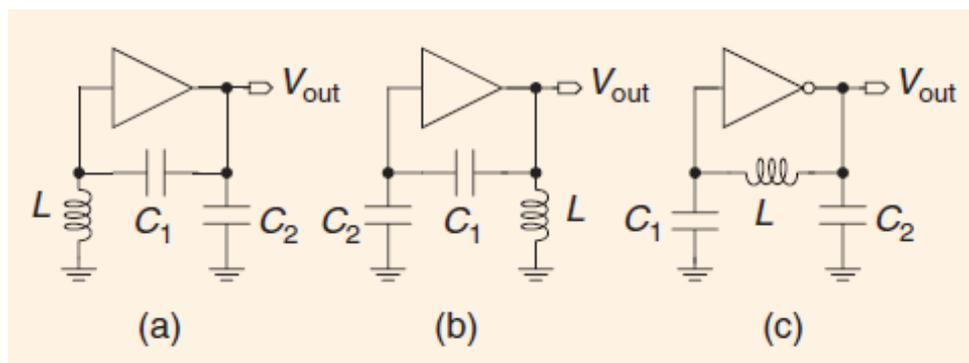
Fonte: (Azadmehr; Paprotny; Marchetti, 2020)

Ambos os osciladores são do tipo realimentado, constituídos por um estágio de

ganho A e um tanque LC de realimentação com ganho representado por β como mostrado na Figura 13. A principal diferença entre ambos, está na configuração do tanque que realimenta o circuito, no qual o Colpitts possui um divisor por capacitores, alcançando frequências de oscilação acima de 100GHz (Azadmehr; Paprotny; Marchetti, 2020), já no Hartley esse divisor é constituído por indutores alcançando frequências de 10Hz a 50MHz (??), ambos em formato π como mostra a Figura 14.

A popularidade dessas configurações se deu pela sua simplicidade, facilidade na operação e estabilidade superior a seus antecessores. Na literatura recente são amplamente encontrados em aplicações de áudio e comunicações, principalmente naquelas que necessitam alta frequência (Azadmehr; Paprotny; Marchetti, 2020).

Figura 15 – Topologias Colpitts, a) o indutor está conectado na entrada do amplificador, b) o indutor está conectado na saída do amplificador e c) o indutor está conectado entre a entrada e a saída do amplificado e a saída será inversora.



Fonte: (Azadmehr; Paprotny; Marchetti, 2020)

A Figura 15 apresenta configurações para o tanque do oscilador Colpitts, nos quais as opções a) e b) são de amplificação não inversora, enquanto a c) é inversora. Fazendo a análise do circuito da Figura 15, verifica-se que a frequência de ressonância do oscilador é dada por:

$$f_t = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}} \quad (4.1)$$

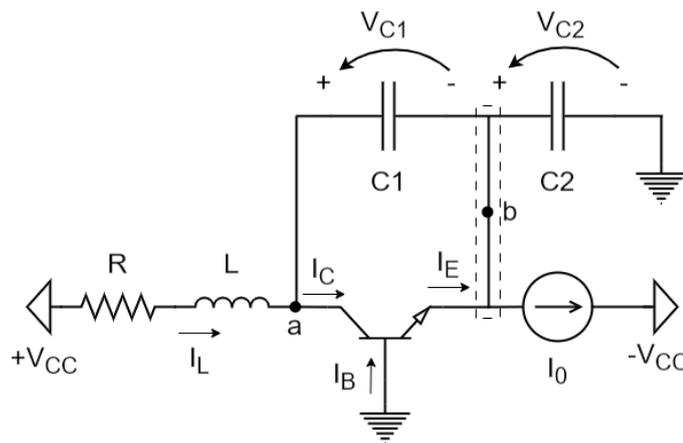
Seguindo o método padrão para análise qualitativa de sistemas não-lineares, foi escolhido um modelo mínimo para o Colpitts que mantém as características principais do oscilador real. Com base nesse modelo, são obtidas equações de estado que serão

utilizadas para descrever e simular as respostas de osciladores acoplados, operando em regime não-linear, objeto desse trabalho.

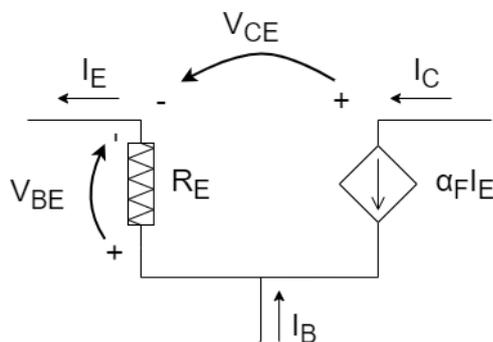
Para obter as equações de estados, será utilizado o clássico esquema para o oscilador Colpitts que contém um transistor bipolar de junção (TBJ) em sua configuração base comum como o elemento de ganho do oscilador e o circuito tanque, como apresentado na Figura 16 (a).

Iremos considerar também que o transistor é modelado por um resistor não linear R_E de tensão controlada V_{BE} e uma fonte elétrica de corrente ideal I_0 . Desse modo, as correntes parasitas e efeitos reversos são ignorados como mostra a Figura 16 (b).

Figura 16 – Diagrama do oscilador Colpitts em sua configuração base comum. a) Circuito do oscilador Colpitts e b) modelo do transistor na configuração base comum.



(a) Circuito do oscilador Colpitts



(b) modelo do transistor na configuração base comum.

Fonte: Autoria própria.

Analisando as correntes do nó do coletor, obtém-se a seguinte equação:

$$I_L = I_{C1} + I_C \quad (4.2)$$

Sabe-se que α_F é o ganho de corrente do transistor bipolar na configuração base comum, podendo ser expresso como $I_C = \alpha_F I_E$ e também que $I_E = f(V_{BE}) = f(-V_{C2})$, então:

$$C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = -\alpha_F I_E + I_L \quad (4.3)$$

$$C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = -\alpha_F f(-V_{C2}) + I_L \quad (4.4)$$

Agora, analisando a malha que vai de $+V_{CC}$ ao terra pelos capacitores C_1 e C_2 , temos:

$$V_{CC} - RI_L - L \frac{dI_L}{dt} - V_{C1} - V_{C2} = 0 \quad (4.5)$$

Reorganizando a equação em função de I_L , tem-se:

$$L \frac{dI_L}{dt} = -V_{C1} - V_{C2} - RI_L + V_{CC} \quad (4.6)$$

Pode-se agora obter uma equação para a tensão no capacitor C_2 analisando o nó b :

$$I_E + I_{C1} = I_0 + I_{C2} \quad (4.7)$$

Utilizando a equação 4.2, tem-se:

$$I_{C2} = I_E - I_C + I_L - I_0 \quad (4.8)$$

$$I_{C2} = I_E - \alpha_F I_E + I_L - I_0 \quad (4.9)$$

$$I_{C2} = (1 - \alpha_F) I_E + I_L - I_0 \quad (4.10)$$

$$C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = (1 - \alpha_F) f(-V_{C2}) + I_L - I_0 \quad (4.11)$$

Utilizando as variáveis de estado V_{C1} , V_{C2} e I_L , no qual $f(*)$ é o ponto de operação, obtém-se:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dV_{C1}}{dt} = -\alpha_F f(-V_{C2}) + I_L \\ C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} = (1 - \alpha_F) f(-V_{C2}) + I_L - I_0 \\ L \frac{dI_L}{dt} = -V_{C1} - V_{C2} - RI_L + V_{CC} \end{cases} \quad (4.12)$$

Sendo assim, o ponto de operação indica as condições para que o transistor opere na região ativa, permitindo que o circuito entre em modo de oscilação.

4.1 SOLUÇÕES ESTACIONÁRIAS

O ponto de operação $f(*)$ é aquele em que o resistor não-linear do transistor R_E , apresentado na Figura 16 (b), está em condução. Essa característica pode ser expressa como:

$$I_E = f(V_{BE}) = f(-V_{C2}) \quad (4.13)$$

no qual:

$$I_E = \begin{cases} I_0 \left(\frac{V_{BE} - V_{th}}{V_T} \right), & V_{BE} \geq V_{th} \\ 0, & V_{BE} < V_{th} \end{cases} \quad (4.14)$$

Onde $V_{th} = V_T [\ln(\alpha_F \frac{I_0}{I_S} - 1)]$ é a tensão de limiar, com $\alpha_F \approx 0,99$, $I_S \approx 10^{-15} A$, $V_T \equiv \frac{k_B T}{q} \approx 26 mV$ à $300 K$ (k_B =constante de Boltzman, T = temperatura em K e q = carga do elétron).

Utilizando as equações de estado, pode-se obter a solução estacionária para o ponto de operação.

$$\begin{cases} C_1 \dot{V}_{C1} = -\alpha_F f(-V_{C2}) + I_L, & (i) \\ C_2 \dot{V}_{C2} = (1 - \alpha_F) f(-V_{C2}) + I_L - I_0, & (ii) \\ L \dot{I}_L = -V_{C1} - V_{C2} - RI_L + V_{CC}, & (iii) \end{cases} \quad (4.15)$$

Fazendo $\dot{V}_{C1} = 0$, $\dot{V}_{C2} = 0$, $\dot{I}_L = 0$ e $f(-V_{C2}) = I_0 \left(\frac{V_{BE} - V_{th}}{V_T} \right) = I_0 \left(\frac{-V_{C2} - V_{th}}{V_T} \right)$, relacionando as equações (i) e (ii) para a tensão dos capacitores, obtém-se:

$$I_0 = f(-V_{C2}) = I_0 \left(-\frac{V_{C20} - V_{th}}{V_T} \right) \quad (4.16)$$

Eliminando-se I_0 da equação 4.16 e reorganizando em função de V_{C20} , temos:

$$V_T = -V_{C20} - V_{th} = -V_{C20} - VT \ln \left(\alpha_F \frac{I_0}{I_S} \right) + V_T \quad (4.17)$$

$$V_{C20} = -VT \ln \left(\alpha_F \frac{I_0}{I_S} \right) \quad (4.18)$$

Aplicando as mesmas considerações à equação 4.15 (i), obtém-se:

$$I_{L0} = \alpha_F f(-V_{C2}) \quad (4.19)$$

Relacionando as equações 4.16 e 4.19, chega-se a:

$$I_{L0} = \alpha_F I_0 \quad (4.20)$$

Agora, aplicando as equações 4.18 e 4.20 na equação 15 (iii):

$$-V_{C10} - V_{C20} - RI_{L0} + V_{CC} = 0 \quad (4.21)$$

$$V_{C10} = VT \ln \left(\alpha_F \frac{I_0}{I_S} \right) - R \alpha_F I_0 + V_{CC} \quad (4.22)$$

Logo, apresenta-se o conjunto de soluções estacionárias para o ponto de operação:

$$O : \begin{cases} V_{C10} = VT \ln \left(\alpha_F \frac{I_0}{I_S} \right) - R \alpha_F I_0 + V_{CC} \\ V_{C20} = -VT \ln \left(\alpha_F \frac{I_0}{I_S} \right) \\ I_{L0} = \alpha_F I_0 \end{cases} \quad (4.23)$$

4.2 EQUAÇÕES DE ESTADO NORMALIZADAS

Para simplificar os cálculos numéricos introduzimos variáveis de estado adimensionais (x_1 , x_2 e x_3), escolhendo-se como origem do novo sistema de coordenadas o ponto de operação (O). Normalizando as tensões ($V_{ref} = V_T$), correntes ($I_{ref} = I_0$) e tempo ($t_{ref} = \frac{1}{\omega_0}$), no qual $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}$, essas relações nos dão:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{V_T} [V_{C1}(\omega_0 t) - V_{C10}] \\ x_2(t) = \frac{1}{V_T} [V_{C2}(\omega_0 t) - V_{C20}] \\ x_3(t) = \frac{1}{I_0} [I_L(\omega_0 t) - I_{L0}] \end{cases} \quad (4.24)$$

Fazendo a transformação linear nas variáveis de estado e tempo, as equações para o oscilador Colpitts podem ser reescritas em termos das variáveis de estado.

Resolvendo para a primeira variável:

$$\frac{d}{dt}(V_{C1}) = \frac{1}{C_1} [-\alpha_F f(-V_{C2}) + I_L] \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dt}(x_1 V_T + V_{C10}) = \frac{1}{C_1} [-\alpha_F f(-V_{C2}) + I_L] \quad (4.26)$$

$$\dot{x}_1 V_T \omega_0 = \frac{1}{C_1} [-\alpha_F n(-x_2) + x_3] \quad (4.27)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{C_1 V_T \omega_0} [-\alpha_F n(-x_2) + x_3] \quad (4.28)$$

Para a segunda variável:

$$\frac{d}{dt}(V_{C2}) = \frac{1}{C_2} [(1 - \alpha_F) f(-V_{C2}) + I_L - I_0] \quad (4.29)$$

$$\frac{d}{dt}(x_2 V_T + V_{C20}) = \frac{1}{C_2} [(1 - \alpha_F) f(-V_{C2}) + I_L - I_0] \quad (4.30)$$

$$\dot{x}_2 V_T \omega_0 = \frac{1}{C_2} [(1 - \alpha_F) n(-x_2) + x_3 - I_0] \quad (4.31)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2 V_T \omega_0} [(1 - \alpha_F) n(-x_2) + x_3 - I_0] \quad (4.32)$$

E, por fim, para a terceira variável:

$$\frac{d}{dt}(I_L) = \frac{1}{L}[-V_{C1} - V_{C2} - RI_L + V_{CC}] \quad (4.33)$$

$$\frac{d}{dt}(x_3 I_0 + I_{L0}) = \frac{1}{L}[-V_{C1} - V_{C2} - RI_L + V_{CC}] \quad (4.34)$$

$$\dot{x}_3 I_0 \omega_0 = \frac{1}{L}[-x_1 - x_2 - Rx_3 + V_{CC}] \quad (4.35)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{LI_0 \omega_0}[-x_1 - x_2 - Rx_3 + V_{CC}] \quad (4.36)$$

Chegamos então ao seguinte conjunto de equações de estado normalizadas:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{C_1 V_T \omega_0} [-\alpha_F n(-x_2) + x_3] \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C_2 V_T \omega_0} [(1 - \alpha_F)n(-x_2) + x_3 - I_0] \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{LI_0 \omega_0} [-x_1 - x_2 - Rx_3 + V_{CC}] \end{cases} \quad (4.37)$$

Pode-se reescrever o conjunto de equações relacionando-as a variáveis que descrevem características do funcionamento do circuito elétrico, tais como:

- O fator de qualidade do tanque RL ($Q = \frac{\omega_0 L}{R}$).
- O termo para o divisor de tensão capacitivo ($K = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$).
- O parâmetro g^* é o ganho da malha no qual o critério de Barkhausen é satisfeito para $\alpha_F = 1$. Esse critério determina a condição para o qual o sistema irá oscilar.

Em geral, o sistema começa a oscilar somente se a condição $g^* > 1$ for satisfeita. Chega-se assim ao conjunto de equações de estado normalizadas utilizando os parâmetros g^* , K e Q .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{g^*}{Q(1-k)} [n(-x_2) + x_3] \\ \dot{x}_2 = \frac{g^*}{QK} x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{QK(1-k)}{g^*} [x_1 + x_2] - \frac{1}{Q} x_3 \end{cases} \quad (4.38)$$

4.3 COMPORTAMENTO CAÓTICO DO OSCILADOR COLPITTS

Um diagrama de bifurcação é um gráfico que mostra como o comportamento de um sistema muda em função de um particular parâmetro. Ele é frequentemente usado na dinâmica não linear para apresentar as regiões de diferentes regimes de oscilações (frequência única, múltiplas frequências, caos) em função de um parâmetro crítico.

Em um diagrama de bifurcação, o parâmetro varia no eixo horizontal, e uma variável do sistema é representada na escala vertical. À medida que o parâmetro é variado, pontos no gráfico são desenhados para mostrar o comportamento do sistema em cada valor do parâmetro. Quando o sistema se comporta de forma estável, apenas poucos pontos são desenhados para cada valor do parâmetro. No entanto, quando o sistema apresenta comportamento caótico, um número grande de pontos de uma quantidade divergente são desenhados para o mesmo valor do parâmetro, mostrando trajetórias, entre as infinitas que o sistema pode seguir.

A partir das equações de estado para o oscilador Colpitts foram construídos os diagramas de bifurcação em função do parâmetro I_0 (Figura 18), a corrente do oscilador, e g^* (Figura 17), que é diretamente relacionado à corrente do oscilador, pelos quais têm-se o controle do comportamento do oscilador e sua rota ao caos.

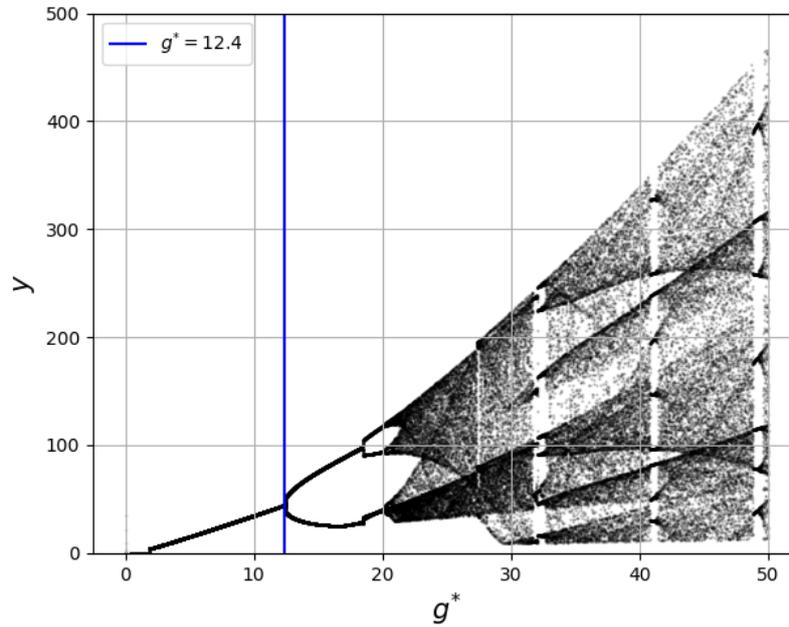
$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{g^*}{Q(1-k)} [n(-y) + z] \\ \dot{y} = \frac{g^*}{QK} z \\ \dot{z} = -\frac{QK(1-k)}{g^*} [x + y] - \frac{1}{Q} z \end{cases} \quad (4.39)$$

Para facilitar as análises, diferentemente da seção anterior (ver eq. 4.38) utilizamos x , y e z para representar as variáveis de estado normalizadas x_1 , x_2 e x_3 respectivamente. No sistema 4.39, Q é o fator de qualidade do tanque RL ($Q = \frac{\omega_0 L}{R}$), K é o termo para o divisor de tensão capacitivo ($K = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$) e $g^* = \frac{\alpha_F I_0 L}{V_T R (C_1 + C_2)}$. Esse sistema é obtido considerando-se condições ideais ($\alpha_F = 1$ e $Q_0 = 0$) como descrito na seção anterior.

Pode-se verificar nas Figuras 17 e 18 que a primeira bifurcação ocorre após $g^* = 12.40$ o que equivale a corrente de $1.95mA$. A partir desse valor, novas bifurcações ocorrem e, aproximadamente para $g^* > 21$ o sistema entra em regime caótico.

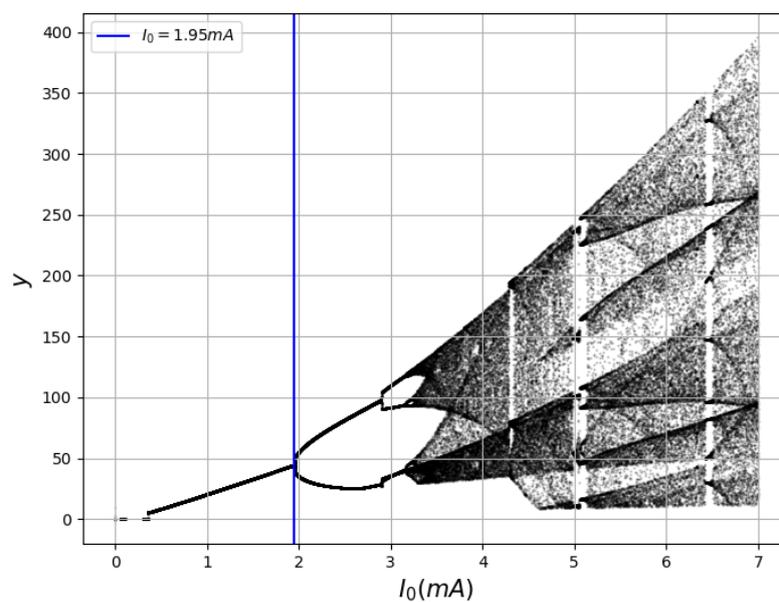
As Figuras 19 e 20 apresentam, respectivamente, séries temporais e os diagramas de espaço fase para as variáveis de estado x e y , pelos quais confirmam o regime de

Figura 17 – Diagrama de bifurcação, obtido por meio de simulação numérica, para a variável de estado y em função de g^* utilizando os parâmetros: $C_1 = 10nF$, $C_2 = 3.3nF$, $R = 100\Omega$ e $L = 220\mu H$.



Fonte: Autoria própria.

Figura 18 – Diagrama de bifurcação, obtido por meio de simulação numérica, para a variável de estado y em função da corrente I_0 utilizando-se os parâmetros: $C_1 = 10nF$, $C_2 = 3.3nF$, $R = 100\Omega$ e $L = 220\mu H$.



Fonte: Autoria própria.

funcionamento do oscilador previsto pelo diagrama de bifurcação, calculado numericamente. A Figura 20 foi desenhada eliminando-se o transiente para melhor visualizar o comportamento do oscilador ao longo do tempo. O eixo vertical da série temporal apresentada na Figura 19 é adimensional e tem sua escala modificada para melhor visualização do comportamento do sinal, o qual tem sua amplitude aumentada a medida que corrente de operação I_0 cresce, o que também condiz ao diagrama de bifurcação apresentado.

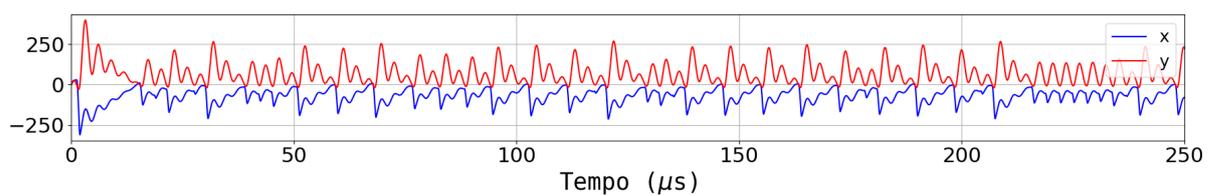
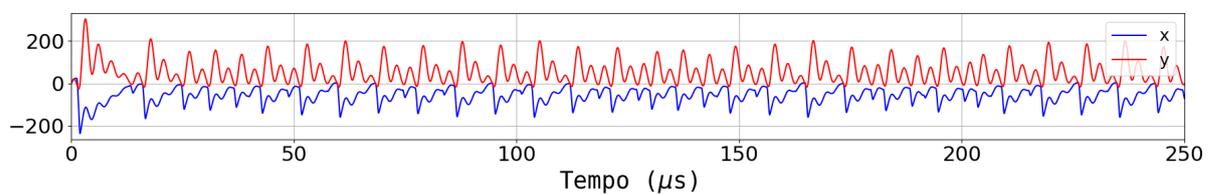
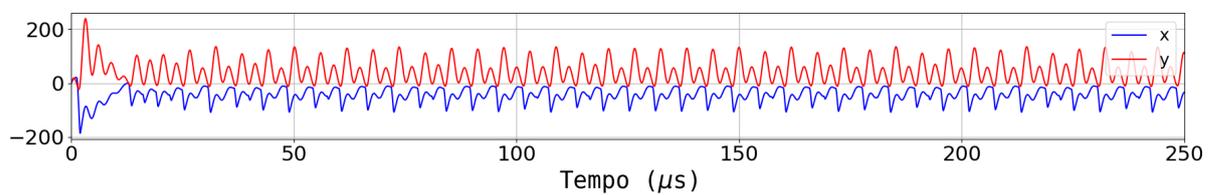
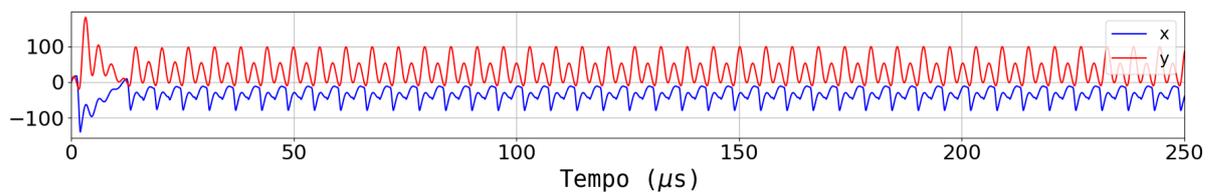
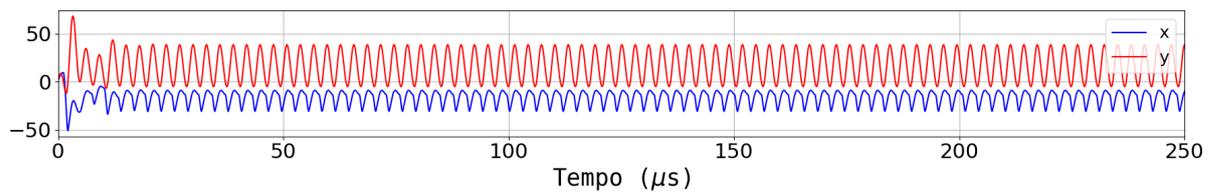
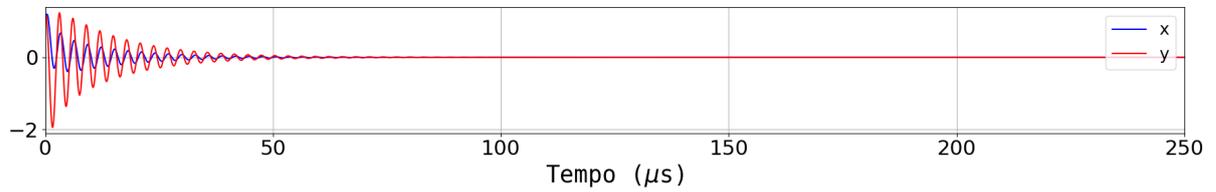
Utilizando um simulador de circuitos eletrônicos, foi montado o circuito referente ao oscilador Colpitts, no qual foram obtidas as equações de estado. Verificou-se que o oscilador entra em regime caótico muito antes da corrente chegar ao valor que apresentaria a primeira bifurcação ($I_0 = 1.95mA$).

A não correspondência observada entre o diagrama de bifurcação obtido numericamente apresentado na Figura 18 e o medido no simulador de circuitos eletrônicos Figura 21, não é surpreendente, e de fato esperado, dada as diferenças com os valores dos componentes numéricos e reais. Buscou-se obter um fator de escala que permitisse a correspondência.

A Figura 22 apresenta os resultados da simulação em que varia-se a corrente no circuito até obter-se o valor no qual ocorre a primeira bifurcação (dobra-se o período), relacionando-o com o valor da corrente em que o mesmo comportamento ocorre no diagrama da Figura 18.

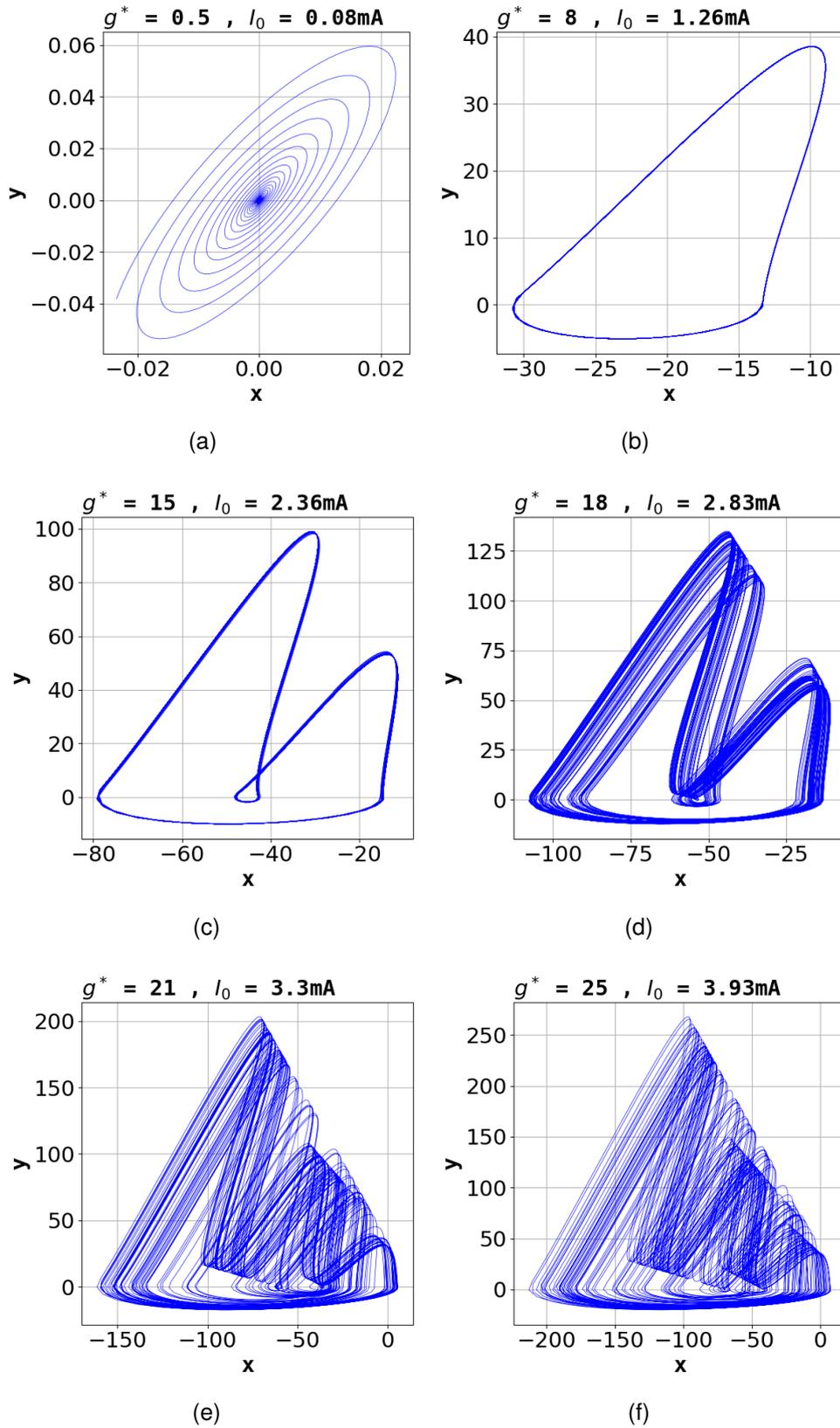
Com esses valores, obtém-se um fator de escala que permite construir um novo diagrama de bifurcação (Figura 23), em função da corrente. Desta forma é mais direta a comparação com a figura obtida com o simulador de circuitos eletrônicos.

Figura 19 – Séries temporais para as variáveis de estado x e y em diferentes valores de g^* utilizando os parâmetros: $C_1 = 10nF$, $C_2 = 3.3nF$, $R = 100\Omega$ e $L = 220\mu H$.



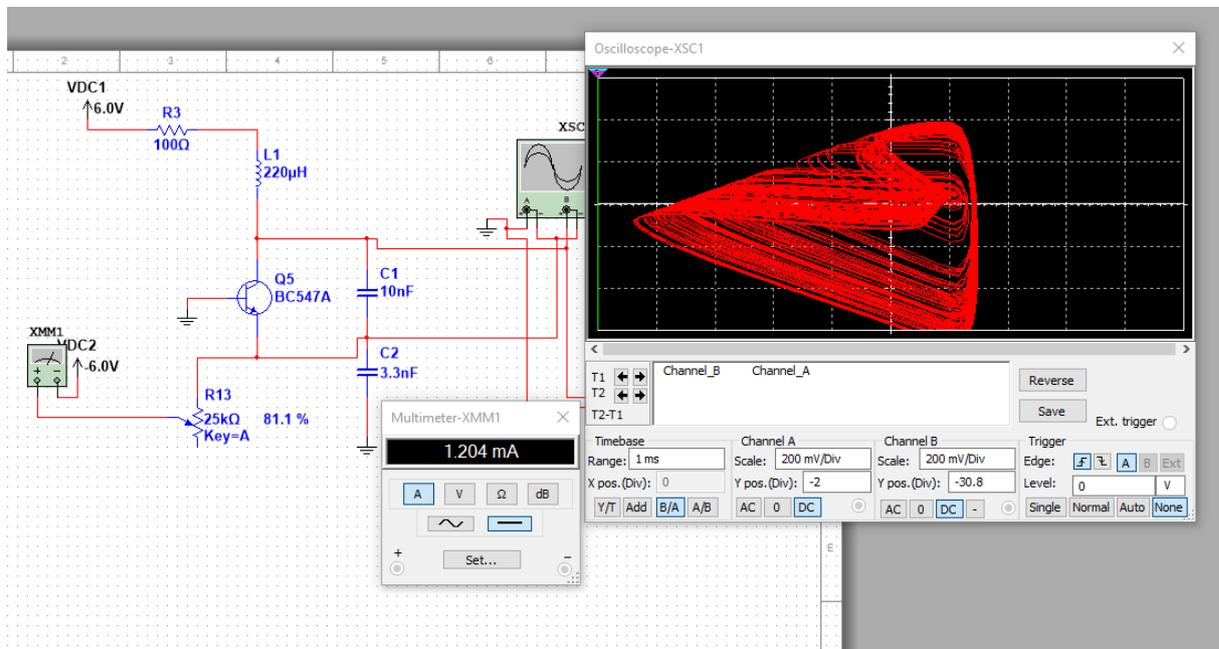
Fonte: Autoria própria.

Figura 20 – Retrato de fase com x em função de y para diferentes valores g^* utilizando os parâmetros: $C_1 = 10nF$, $C_2 = 3.3nF$, $R = 100\Omega$ e $L = 220\mu H$.



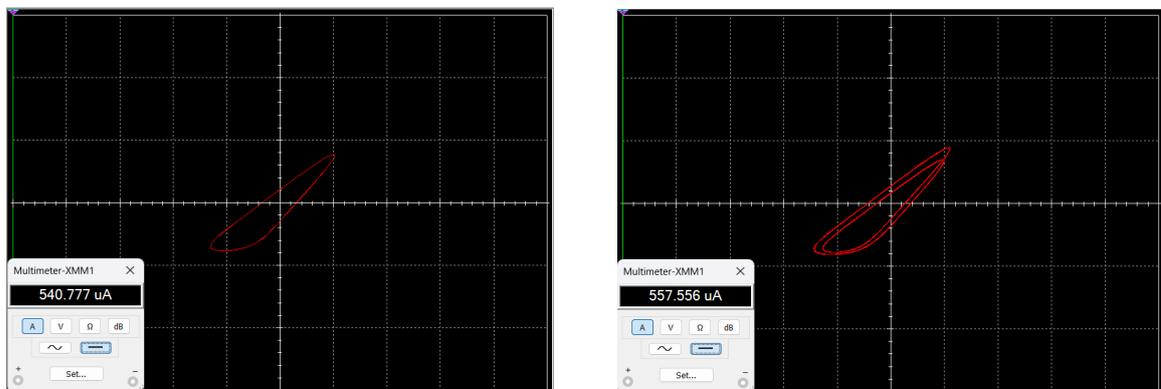
Fonte: Autoria própria.

Figura 21 – Ambiente do simulador de circuitos eletrônicos, apresentando resultados para a corrente do circuito em aproximadamente 1.2mA. Em destaque o retrato de fase, obtido quando o oscilador está operando em regime caótico.



Fonte: Autoria própria.

Figura 22 – Tensão no capacitor 1 em função da tensão no capacitor 2 ($V_{C1} \times V_{C2}$) apresentando o valor da corrente I_0 para o qual (a) o circuito opera em regime de frequência única e (b) para o qual ocorre a primeira bifurcação do oscilador, ou seja, entra em regime com duas frequências.

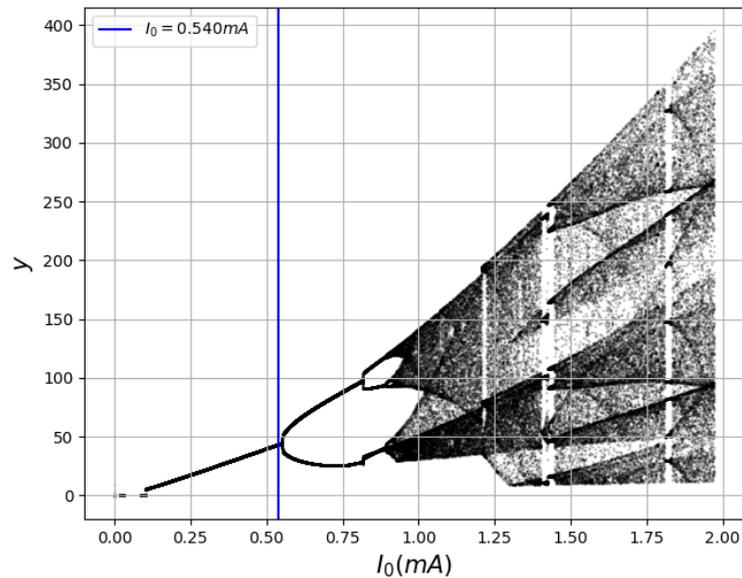


(a) Regime de frequência única.

(b) Primeira bifurcação

Fonte: Autoria própria.

Figura 23 – Diagrama de bifurcação da variável y em função de I_0 corrigido com o fator de escala.



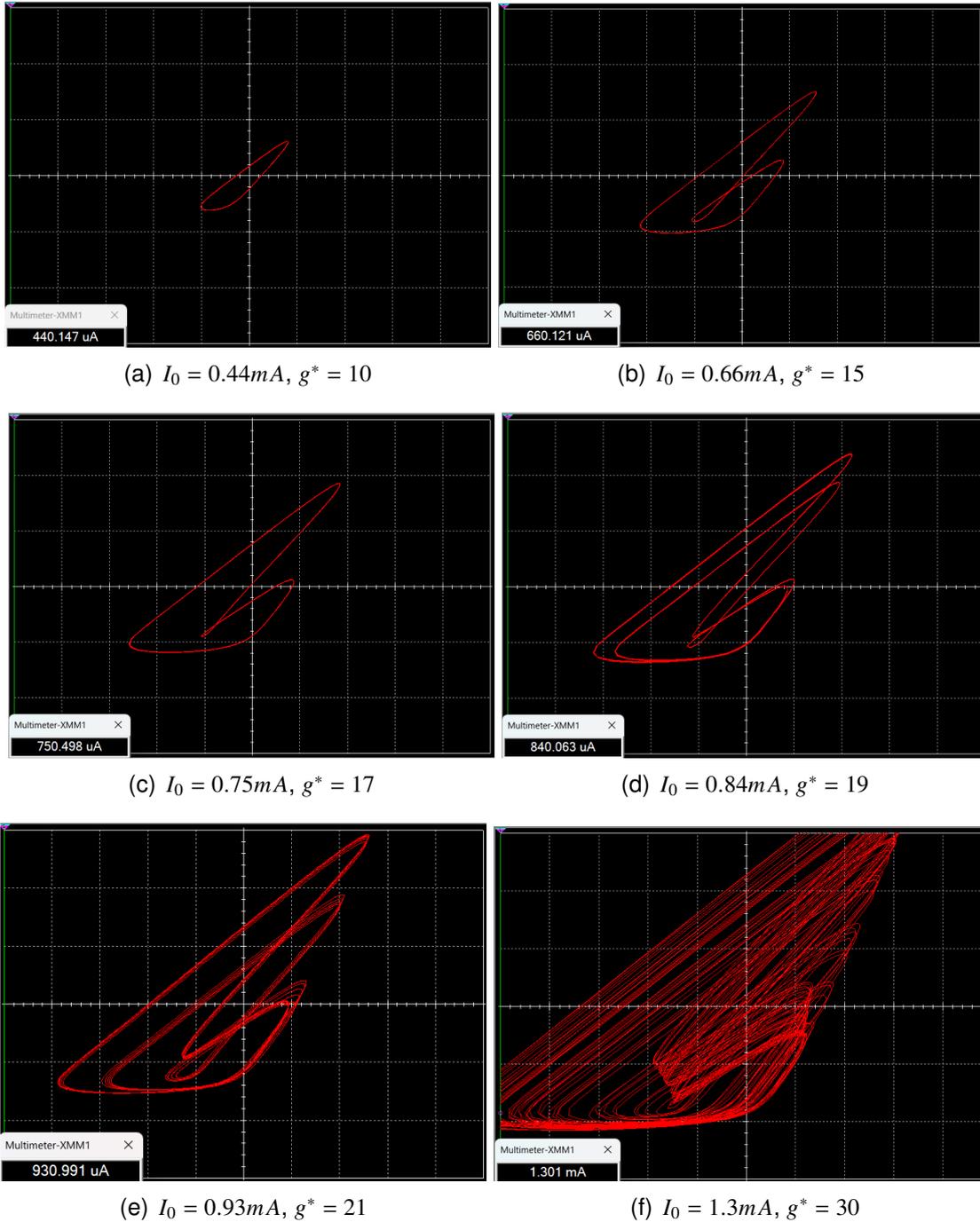
Fonte: Autoria própria.

As Figuras 24 e 26 mostram a correspondência entre o diagrama de bifurcação, apresentado na Figura 23, e o oscilador simulado para diferentes valores de corrente.

As duplicações de períodos e formatos dos retratos de fase se aproximam bastante do que foi obtido pelas equações de estado quando aplicado o fator de correção. Não foram aplicados fatores de correção para as amplitudes, pois não era o interesse no momento, o que pode ser feito *a posteriori*.

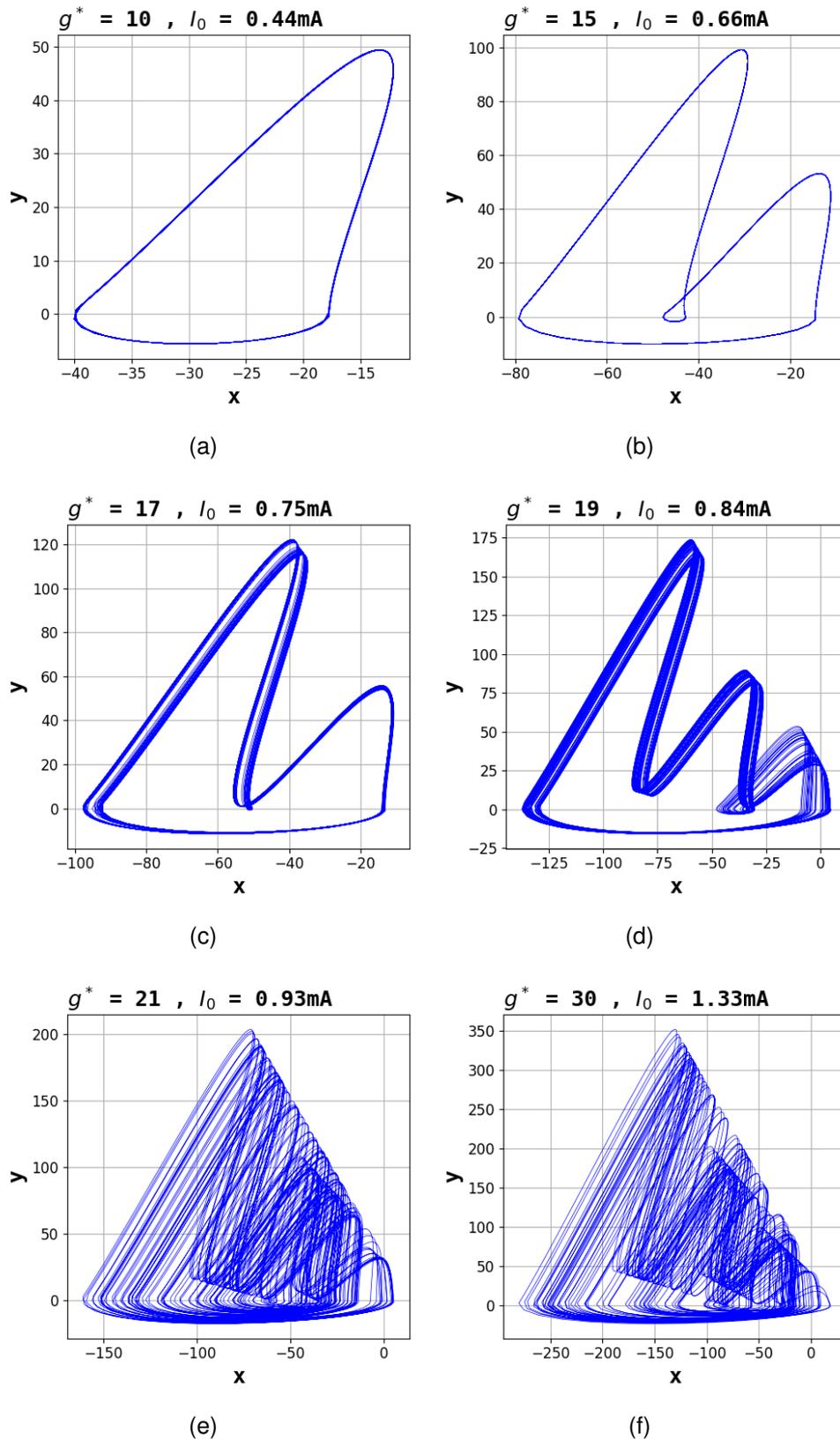
O diagrama de bifurcação mostrou ser uma ferramenta bastante funcional para avaliar o comportamento desse circuito não-linear, permitindo-nos identificar faixas de regime de operação e características do sistema. Esses resultados orientam a sua implementação experimental.

Figura 24 – Retrato de fase ($V_{C1} \times V_{C2}$) para vários valores de corrente obtidos por meio do simulador de circuitos eletrônicos.



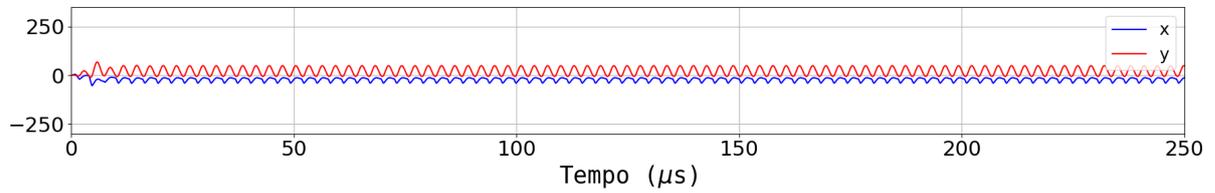
Fonte: De autoria própria.

Figura 25 – Diagramas de espaço fase das variáveis $x \times y$, obtidos por meio de simulação numérica através das equações de estado (equações 4.38), para comparação com os gráficos obtidos no simulador.

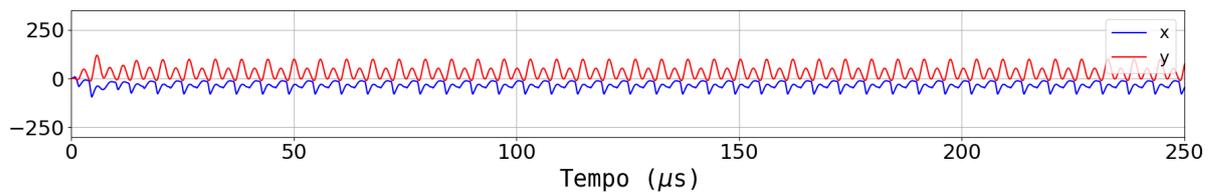


Fonte: Autoria própria.

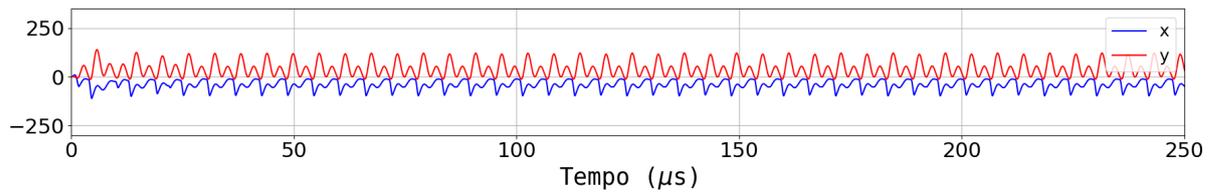
Figura 26 – Séries temporais das variáveis x e y , obtidas por meio de simulação numérica através das equações de estado (equações 4.38), para comparação com os gráficos obtidos no simulador.



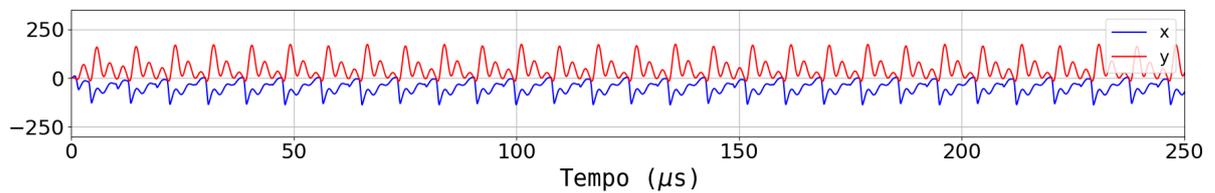
(a) $I_0 = 0.46mA$, $g^* = 10$



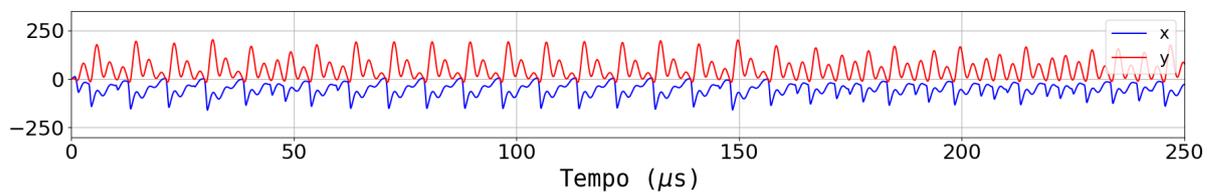
(b) $I_0 = 0.69mA$, $g^* = 15$



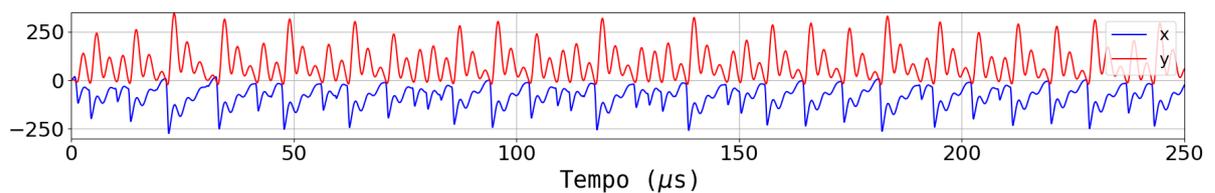
(c) $I_0 = 0.79mA$, $g^* = 17$



(d) $I_0 = 0.88mA$, $g^* = 19$



(e) $I_0 = 0.97mA$, $g^* = 21$



(f) $I_0 = 1.39mA$, $g^* = 30$

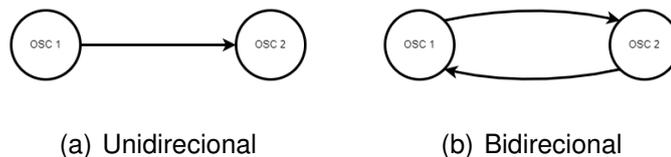
Fonte: Autoria própria.

5 SINCRONIZAÇÃO

Nas últimas décadas, houve um crescente interesse no tema da sincronização de sistemas caóticos, posto que a sincronização para esses sistemas não parecia ser óbvio, *a priori*. Como se sabe, sistemas caóticos idênticos, mas com pequenas variações em suas condições iniciais possuem trajetórias bem diferentes ao longo do tempo (Strogatz, 1994).

Louis Pecora e Thomas Carroll demonstraram nos anos 1990 que sistemas caóticos acoplados podem sincronizar (Pecora; Carroll, 1990). Desde então vários estudos foram realizados para sincronizar osciladores eletrônicos com comportamento caótico.

Figura 27 – Diagrama representando o acoplamento (a) unidirecional e (b) bidirecional.



Fonte: Autoria própria.

Pode-se definir a sincronização como o processo onde dois ou mais sistemas caóticos (equivalentes ou não) ajustam-se entre si uma determinada propriedade de seu comportamento que ocorre devido ao acoplamento, seja ele acoplamento unidirecional ou bidirecional, como representado na Figura 27. No acoplamento unidirecional, apenas o segundo oscilador (*response*) recebe algum sinal de variável do primeiro oscilador (*driver*), já no acoplamento bidirecional, ambos recebem os sinais do outro oscilador.

A sincronização pode ocorrer de forma completa (Pecora; Carroll, 1990; Boccaletti et al., 2002), em fase (Jr; Ott; Hess, 1998) ou ainda com atraso (Fischer et al., 2006), entre outras diversas maneiras, os quais, alguns deles serão apresentados ao longo dessa dissertação.

5.1 SINCRONIZAÇÃO COMPLETA POR ACOPLAMENTO DIRETO

Para se verificar a sincronização completa por acoplamento direto, serão utilizados osciladores do tipo Colpitts idênticos acoplados. Os subíndices 1 e 2 indicam as

variáveis de estado referentes a cada um dos osciladores, "*driver*" e "*response*", respectivamente. Como Pecora e Carroll demonstraram, podemos realizar o acoplamento dos sistemas, trocando uma variável do sistema *response* de forma direta pela variável do sistema *driver*, ou seja, realizando um acoplamento unidirecional. As equações de estado que governam o comportamento do sistema *driver-response* dos sistemas Colpitts por acoplamento direto é apresentado a seguir:

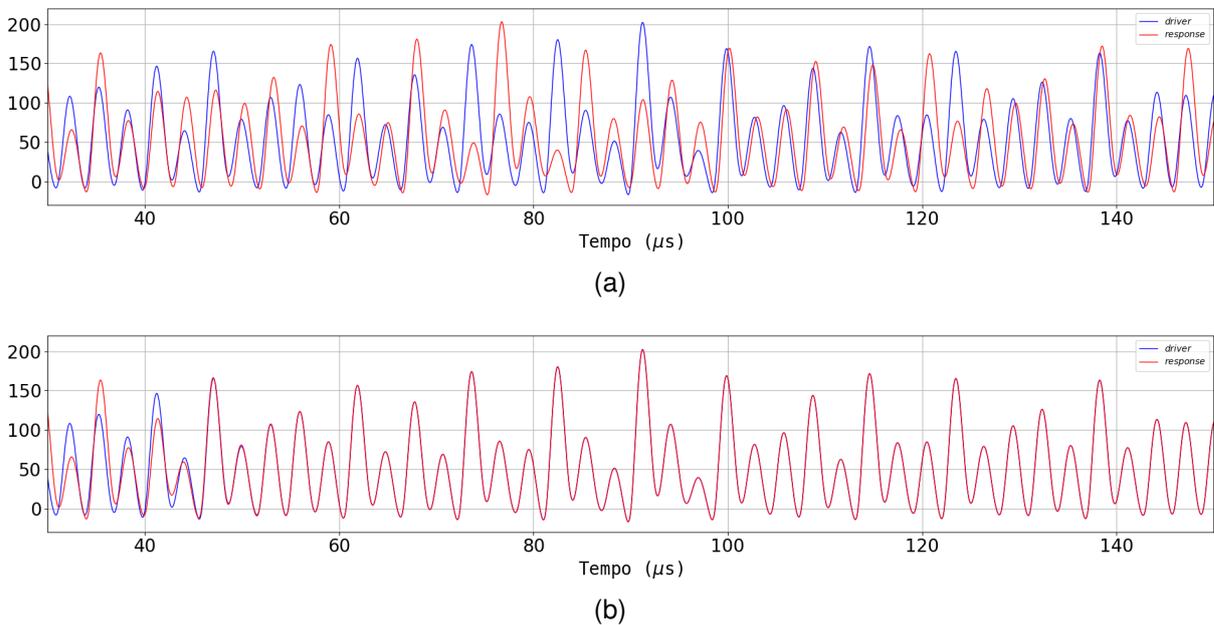
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{g^*}{Q(1-k)} [n(-y_1) + z_1] \\ \dot{y}_1 = \frac{g^*}{QK} z_1 \\ \dot{z}_1 = -\frac{QK(1-k)}{g^*} [x_1 + y_1] - \frac{1}{Q} z_1 \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{g^*}{Q(1-k)} [n(-y_1) + z_2] \\ \dot{y}_2 = \frac{g^*}{QK} z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{QK(1-k)}{g^*} [x_2 + y_1] - \frac{1}{Q} z_2 \end{cases} \quad (5.2)$$

Onde, Q é o fator de qualidade do tanque RL ($Q = \frac{\omega_0 L}{R}$), K é o termo para o divisor de tensão capacitivo ($K = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$) e $g^* = \frac{\alpha_F I_0 L}{V_T R (C_1 + C_2)}$. Esse sistema é obtido considerando-se condições ideais ($\alpha_F = 1$ e $Q_0 = 0$). Uma descrição mais detalhada do procedimento pode ser encontrada no capítulo 4. Foram usados os valores $C_1 = 10nF$, $C_2 = 3.3nF$ e $L_1 = 220\mu H$ para preservar as análises obtidas inicialmente para o oscilador individual, o qual foi estudado nos capítulos anteriores.

Na Figura 28(a), apresentamos as séries temporais para os dois osciladores idênticos, desacoplados, oscilando a partir de condições iniciais ligeiramente diferentes, onde verificamos a evolução temporal de ambas as variáveis y_1 e y_2 completamente descorrelacionadas. As séries temporais dos sinais das variáveis y_1 e y_2 são mostradas na Figura 28(b) para o sistema acoplado de forma direta, descrito pelo conjunto de equações 5.1 e 5.2.

Figura 28 – Séries temporais para as variáveis de estado y_1 e y_2 para os osciladores *driver* (azul) e *response* (laranja) a) desacoplados e b) desacoplados, ambos partindo de condições iniciais diferentes.



Fonte: Autoria própria.

Percebe-se, que mesmo partindo de condições iniciais diferentes, os sistemas rapidamente sincronizam. Isso se deve as características da variável y_1 inserida no sistema *response* y_2 que aproxima sua trajetória à do sistema *driver* ao longo do tempo.

5.2 SINCRONIZAÇÃO COMPLETA POR ACOPLAMENTO RESISTIVO

A sincronização generalizada também por ser obtida por meio de acoplamento resistivo, que pode ser de forma unidirecional, onde o sistema *response* é estimulado pela dinâmica do sistema *driver*, ou bidirecional onde ambos os sistemas recebem estímulos um do outro.

Na apresentação das equações 5.4, utilizou-se a mesma notação da seção anterior para os subíndices das variáveis. Nas equações do sistema *response* foi introduzido o termo $\epsilon[y_1 - y_2]$, de acoplamento resistivo na equação de y , que representa um acoplamento unidirecional, onde ϵ representa o coeficiente de acoplamento. Esse acoplamento na variável y , tensão no capacitor C_2 , permite, no arranjo experimental, uma referência comum aos dois osciladores em que os sinais serão mensurados. Outro fator importante para se realizar esse acoplamento na variável y é que esse sinal

possui amplitude maior em relação a x e z , o que facilita a realização de medidas experimentais.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{g^*}{Q(1-k)} [n(-y_1) + z_1] \\ \dot{y}_1 = \frac{g^*}{QK} z_1 \\ \dot{z}_1 = -\frac{QK(1-k)}{g^*} [x_1 + y_1] - \frac{1}{Q} z_1 \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{g^*}{Q(1-k)} [n(-y_2) + z_2] \\ \dot{y}_2 = \frac{g^*}{QK} z_2 + \epsilon [y_1 - y_2] \\ \dot{z}_2 = -\frac{QK(1-k)}{g^*} [x_2 + y_2] - \frac{1}{Q} z_2 \end{cases} \quad (5.4)$$

Novamente, como na técnica de substituição direta, utilizando os mesmos valores para os parâmetros dos dois osciladores porém com condições iniciais ligeiramente diferentes. Dessa forma, os sistemas livres possuem trajetórias diferentes.

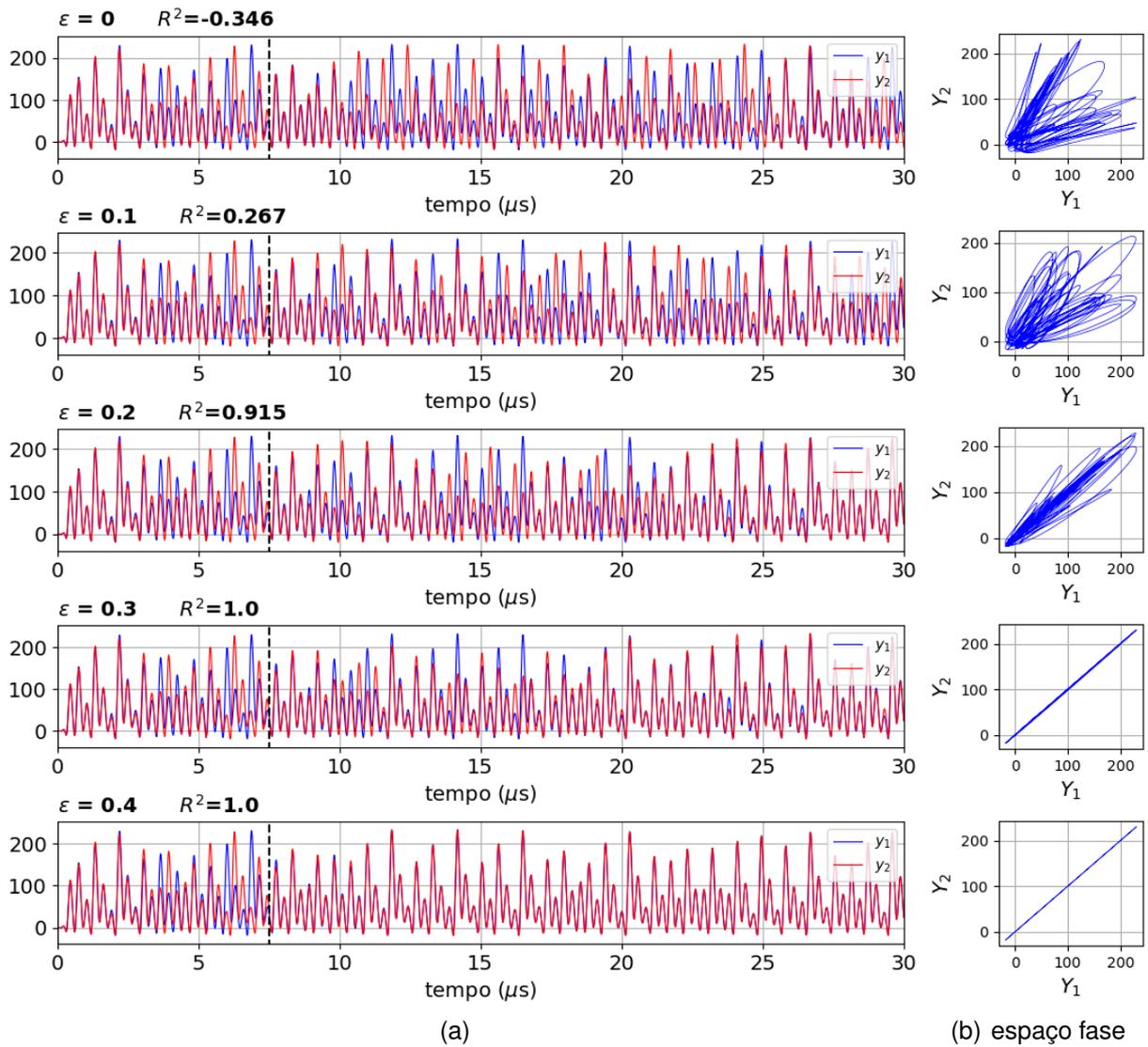
A Figura 29 apresenta, respectivamente, as séries temporais e os diagramas de espaço fase para diferentes valores de ϵ entre 0 e 0.4 do acoplamento resistivo entre as variáveis y_1 e y_2 dos sistemas.

Pode-se verificar que para valores de $\epsilon < 0.1$ a sincronização é fraca (praticamente um acoplamento apenas na fase), resultando em desconexão das amplitudes dos dois osciladores (veja na Figura 29 (a)). Para confirmar a observação, foi utilizada a medida R^2 (capítulo 3.2, o coeficiente de determinação, que verifica o quão bem os dados do sinal observado se ajusta aos dados utilizados como referência, nos permitindo comparar o sinal do *response* com o do *driver*. Quanto mais próximo R^2 estiver do valor 1, melhor a similaridade entre os sinais. A medida que ϵ aumenta, o valor de R^2 entre y_1 e y_2 cresce, até que para $\epsilon > 0.3$ ocorre a sincronização generalizada ($R^2 = 1$).

A sincronização generalizada ocorre mesmo quando os sistemas são ligeiramente diferentes, como mostrado na Figura 30, no qual as séries temporais e espaço fase respectivamente para os sinais y_1 e y_2 são obtidas com um acoplamento fixo em $\epsilon = 0.8$ e variando-se percentualmente os valores dos componentes que constituem os sistemas *driver-response* (C_1, C_2, L, R) entre 5% e 50%.

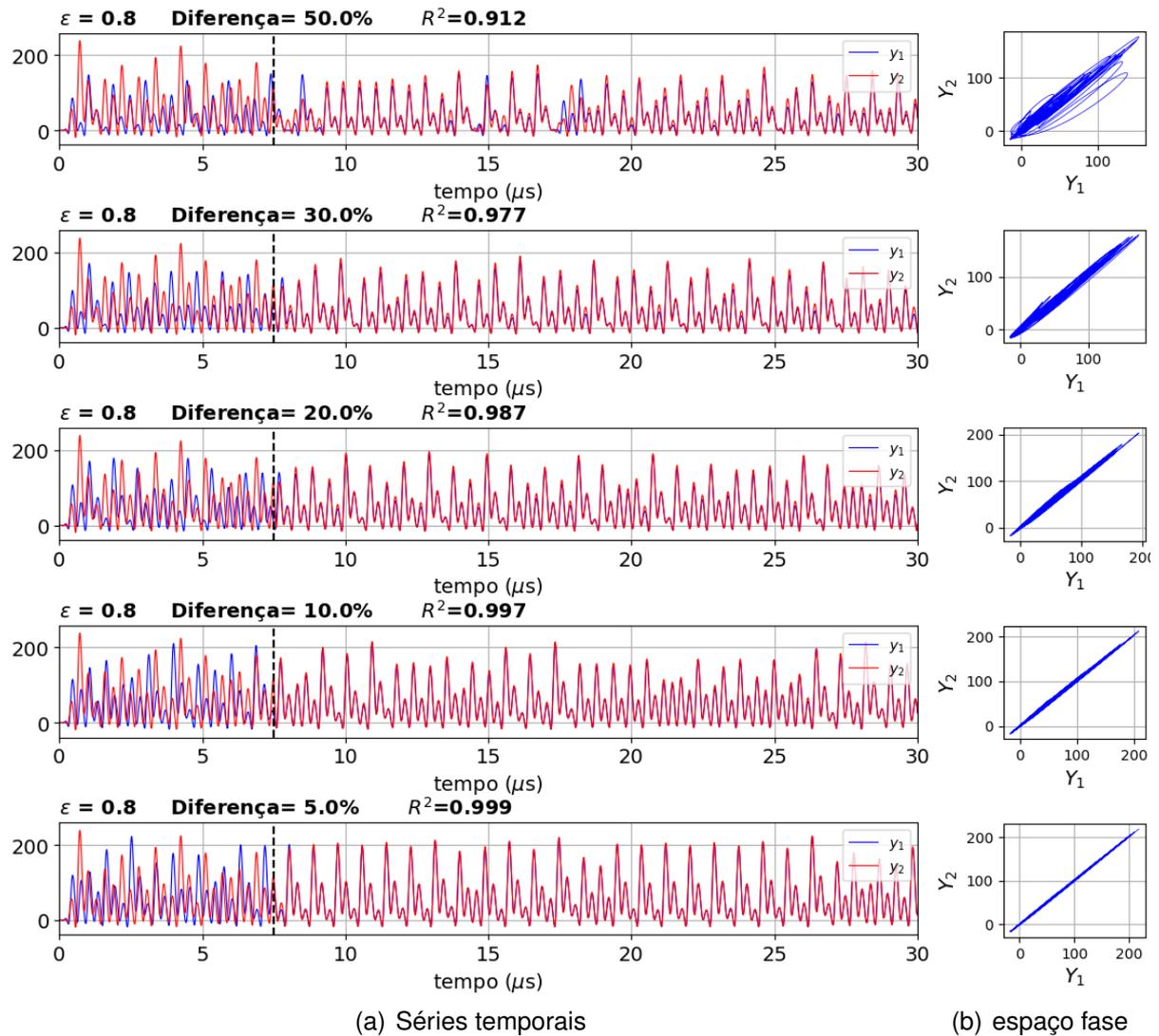
Observa-se que para diferenças percentuais de até 10% entre os parâmetros do sistema a sincronização é bastante forte, acima disso a sincronização decai bastante, como apresenta a Figura 31.

Figura 29 – (a) Séries temporais com o seu correspondente R^2 e (b) diagramas de espaço fase, ambos para as variáveis de estado y_1 e y_2 dos osciladores *driver* e *response* com acoplamento do tipo resistivo para diferentes valores de coeficiente de acoplamento ϵ . A linha vertical pontilhada indica o instante em que o acoplamento entre os osciladores ocorre na simulação.



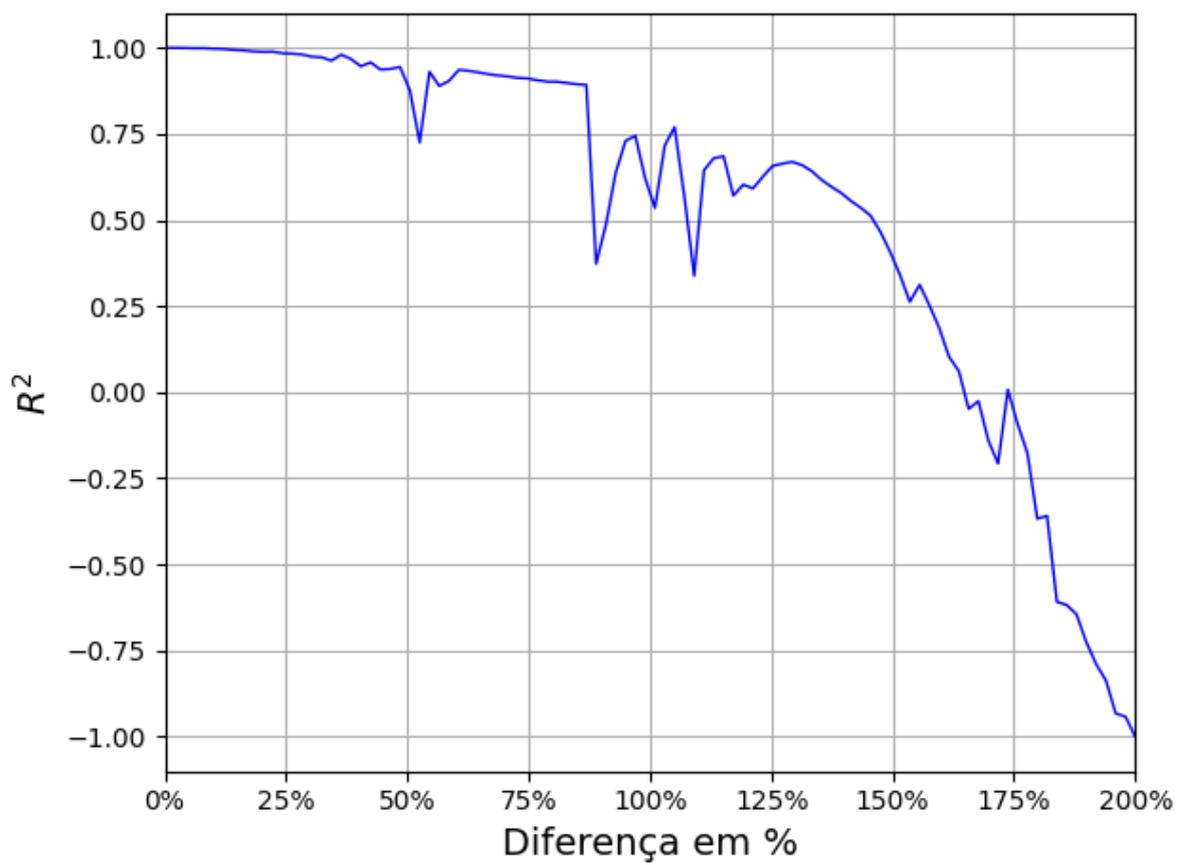
Fonte: Autoria própria.

Figura 30 – Séries temporais para as variáveis de estado y_1 e y_2 dos osciladores *driver* e *response* acoplados de forma resistiva e com diferenças percentuais dos componentes dos sistemas.



Fonte: Autoria própria.

Figura 31 – Variação de R^2 em função da diferença percentual entre os componentes dos sistemas *driver* e *response* para as variáveis de estado y_1 e y_2 acoplados de forma resistiva.



Fonte: Autoria própria.

5.3 SINCRONIZAÇÃO COMPLETA COM ACOPLAMENTO ATRASADO

No acoplamento de dois osciladores sempre ocorre atraso, devido a sua propagação em tempo finito. Se esse atraso for comparável aos tempos característicos da dinâmica do sistema então pode influenciar na forma como os elementos sincronizam-se. No caso do acoplamento unidirecional, a sincronização pode ser feita com um atraso temporal havendo fidelidade do segundo oscilador, no tempo de atraso. Em configurações bidirecionais, os osciladores interagem mutuamente, e o atraso no acoplamento pode levar a novos comportamentos, como a sincronização isócrona, onde dois dos osciladores sincronizam-se "sem defasagem", apesar do atraso. Este fenômeno é observado em redes neurais e em sistemas de comunicação, permitindo um comportamento coletivo sincronizado e estável (FISCHER et al., 2006; FRASCA et al., 2018).

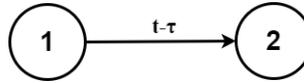
5.3.1 Acoplamento unidirecional com atraso

Realizamos acoplamento unidirecional com atraso, adicionando a equação para a variável y do segundo oscilador Colpitts o termo $\epsilon [y_2(t) - y_1(t - \tau)]$ na equação 5.6. Note que a variável y_1 é tomada no tempo $t - \tau$, em que τ é o atraso de transmissão. As equações dos dois osciladores estão re-escritas abaixo, nas equações 5.5 e 5.6. O sistema com acoplamento atrasado está representado pela Figura 32.

$$\begin{cases} dx_1/dt = \frac{g^*}{Q(1-k)} [-\alpha_F n(-y_1(t)) + z_1(t)] \\ dy_1/dt = \frac{g^*}{QK} [(1 - \alpha_F)n(-y_1(t)) + z_1(t)] \\ dz_1/dt = -\frac{QK(1-k)}{g^*} [x_1(t) + y_1(t)] - \frac{1}{Q}z_1(t) \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} dx_2/dt = \frac{g^*}{Q(1-k)} [-\alpha_F n(-y_2(t)) + z_2(t)] \\ dy_2/dt = \frac{g^*}{QK} [(1 - \alpha_F)n(-y_2(t)) + z_2(t)] - \epsilon [y_2(t) - y_1(t - \tau)] \\ dz_2/dt = -\frac{QK(1-k)}{g^*} [x_2(t) + y_1(t)] - \frac{1}{Q}z_2(t) \end{cases} \quad (5.6)$$

Figura 32 – Representação em diagrama do acoplamento unidirecional com atraso entre dois osciladores Colpitts.



Fonte: Autoria própria.

Devido à complexidade adicional introduzida pelos termos de atraso, as equações diferenciais necessitam de métodos de integração numérica especializados. Um dos métodos amplamente utilizados para a integração de equações diferenciais atrasadas é o método de *Bogacki-Shampine* (ver seção 3.2. Este método é uma variante dos métodos *Runge-Kutta* e é especificamente adaptado para resolver equações diferenciais com atraso (Flunkert, 2011). Por meio desse método, realizou-se a integração numérica para obter as soluções temporais das variáveis dos osciladores 1 e 2 das eq. 5.5 e 5.6.

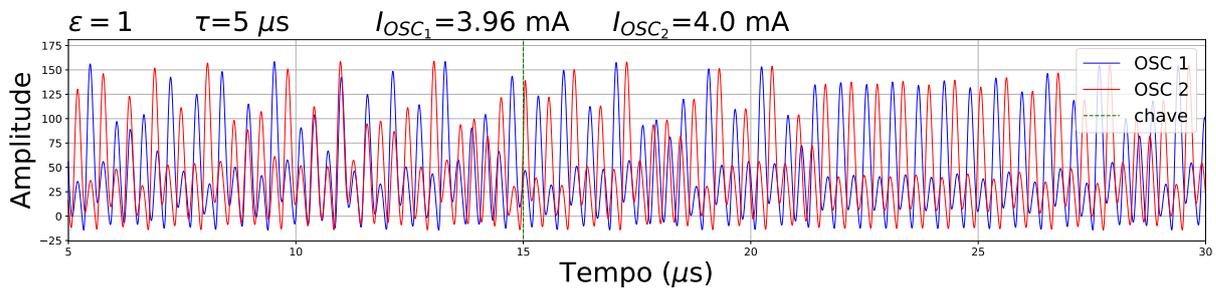
Para comparar os sinais atrasados, foi utilizada a equação 5.7 da correlação cruzada normalizada, que mede a similaridade entre duas séries temporais à medida que uma delas é deslocada no tempo. Essa técnica é particularmente útil para identificar atrasos (τ) ou *lags* temporais entre as séries, e dessa forma definir o tipo de sincronização entre os sinais (Mulet et al., 2003).

Como apresentado na seção 3.2, a correlação cruzada é

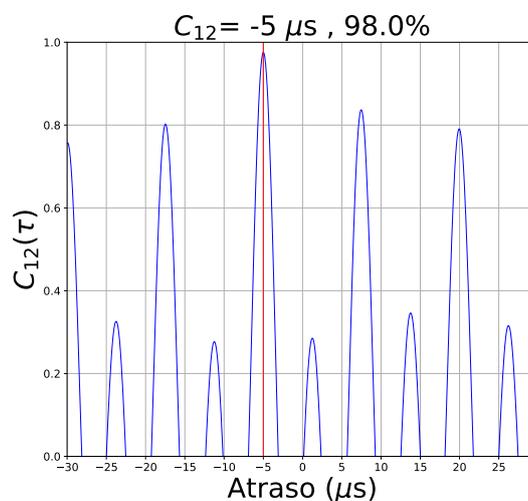
$$C_{xy}(\tau) = \frac{\langle x(t)y(t + \tau) \rangle}{\sqrt{\langle x^2(t) \rangle \langle y^2(t) \rangle}} \quad (5.7)$$

em que $x(t)$ e $y(t)$ são as séries temporais que estão sendo analisadas e τ é o deslocamento temporal para comparação. Seja um sistema descrito pelas eq. 5.5 e 5.6, com condições tais que suas correntes são ligeiramente diferentes ($g_1^* = 25.1$ e $g_2^* = 25.3$) acoplados com valor de acoplamento $\epsilon = 1$, a Figura 33 apresenta séries temporais com a respectiva medida de correlação cruzada normalizada para o sistema proposto, considerando que o atraso de propagação do sinal entre os osciladores é de $5\mu s$ e as condições iniciais são randomicamente distintas. Os osciladores evoluem independentemente até serem acoplados no instante indicado nos gráficos da Figura 33, pela linha pontilhada verde em $15\mu s$ na série temporal. Eles rapidamente sincronizam-se com atraso τ .

Figura 33 – (a) Séries temporais e (b) medida de correlação cruzada para os sistemas das eqs. 5.5 e 5.6 para os osciladores acoplados de forma unidirecional com atraso de $5\mu s$.



(a) Séries temporais



(b) Medida de correlação cruzada normalizada.

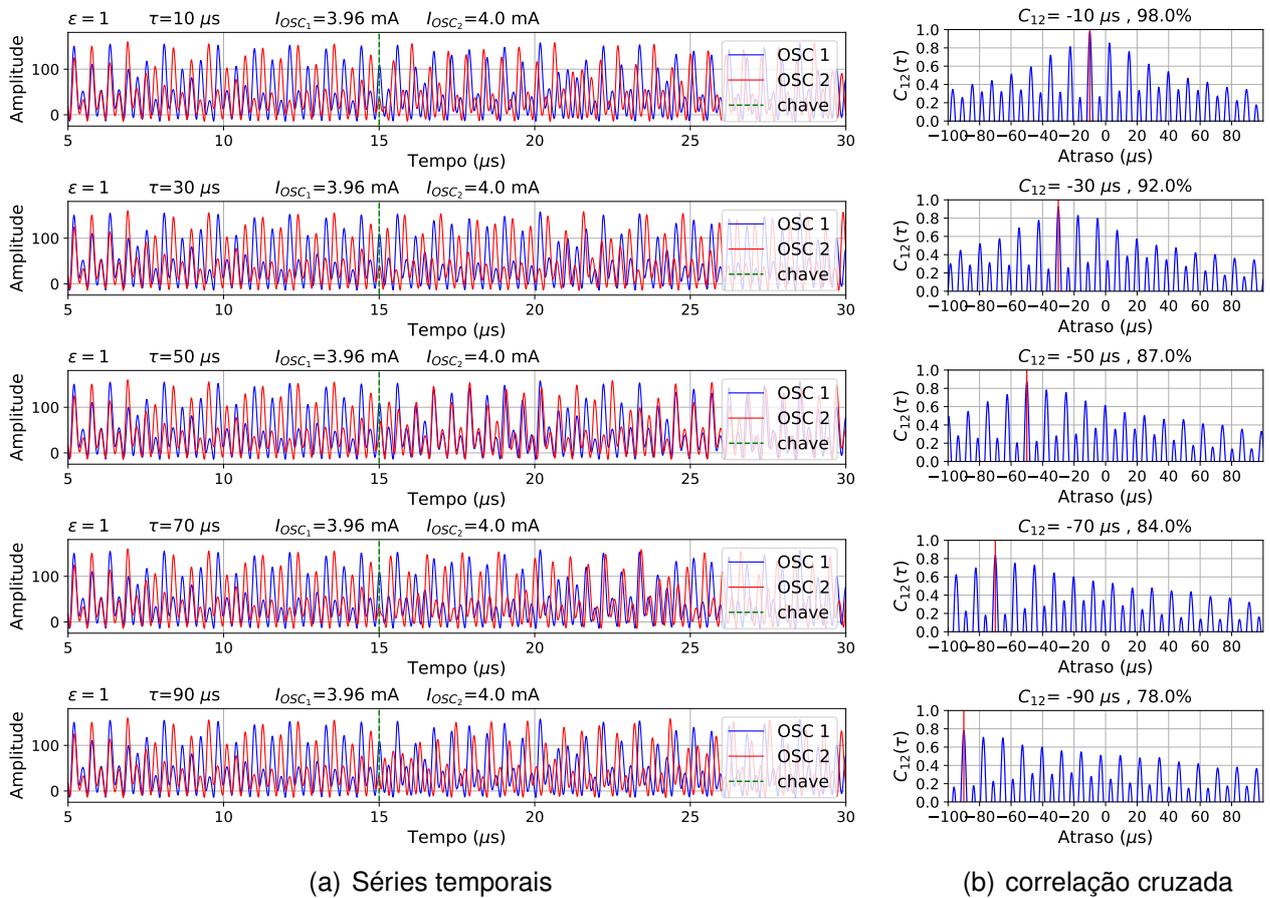
Fonte: Autoria própria.

A correlação máxima ocorre exatamente no atraso imposto no acoplamento, como mostrado na Figura 33 (b). Acima da figura, é indicada uma correlação máxima de 98%, que ocorre em $5\mu s$, evidenciando que a sincronização completa ocorre com o atraso determinado.

Para diferentes valores de atraso, observa-se na Figura 34 que a intensidade da correlação cruzada diminui à medida que o atraso aumenta. No entanto, quando o valor do atraso diminui, observa-se que a correlação aumenta, indicando a ocorrência de sincronização com atraso.

A intensidade da correlação cruzada diminui à medida que o atraso aumenta, como observa-se na Figura 34, onde diferentes valores de atraso são usados. No entanto, quando o valor do atraso diminui, observa-se que a correlação aumenta, indicando a ocorrência de sincronização com atraso.

Figura 34 – Séries temporais e medida de correlação cruzada para os osciladores acoplados de forma unidirecional com diferentes valores de atraso.

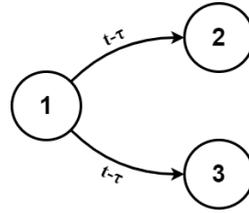


Fonte: Autoria própria.

5.3.2 Três osciladores acoplados unidirecionalmente e com atraso

Com osciladores Colpitts, acoplados de forma unidirecional em um arranjo em que tem-se um oscilador central (1) e dois osciladores externos (2 e 3), figura 35, verificamos se o comportamento visto na subseção 5.3.1 permanece com a presença de mais um oscilador acoplado ao sistema.

Figura 35 – Representação em diagrama do acoplamento unidirecional com atraso entre três osciladores Colpitts.



Fonte: Autoria própria.

O sistema de equações para o arranjo é descrito pelas equações 5.8, 5.9 e 5.10 no qual pode-se verificar a presença do acoplamento nas variáveis y das equações 5.9 e 5.10 que corresponde ao acoplamento unidirecional entre o oscilador central e os osciladores externos.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{g^*}{Q(1-k)} \left[-\alpha_F n(-y_1(t)) + z_1(t) \right] \\ \dot{y}_1 = \frac{g^*}{QK} \left[(1 - \alpha_F) n(-y_1(t)) + z_1(t) \right] \\ \dot{z}_1 = -\frac{QK(1-k)}{g^*} \left[x_1(t) + y_1(t) \right] - \frac{1}{Q} z_1(t) \end{cases} \quad (5.8)$$

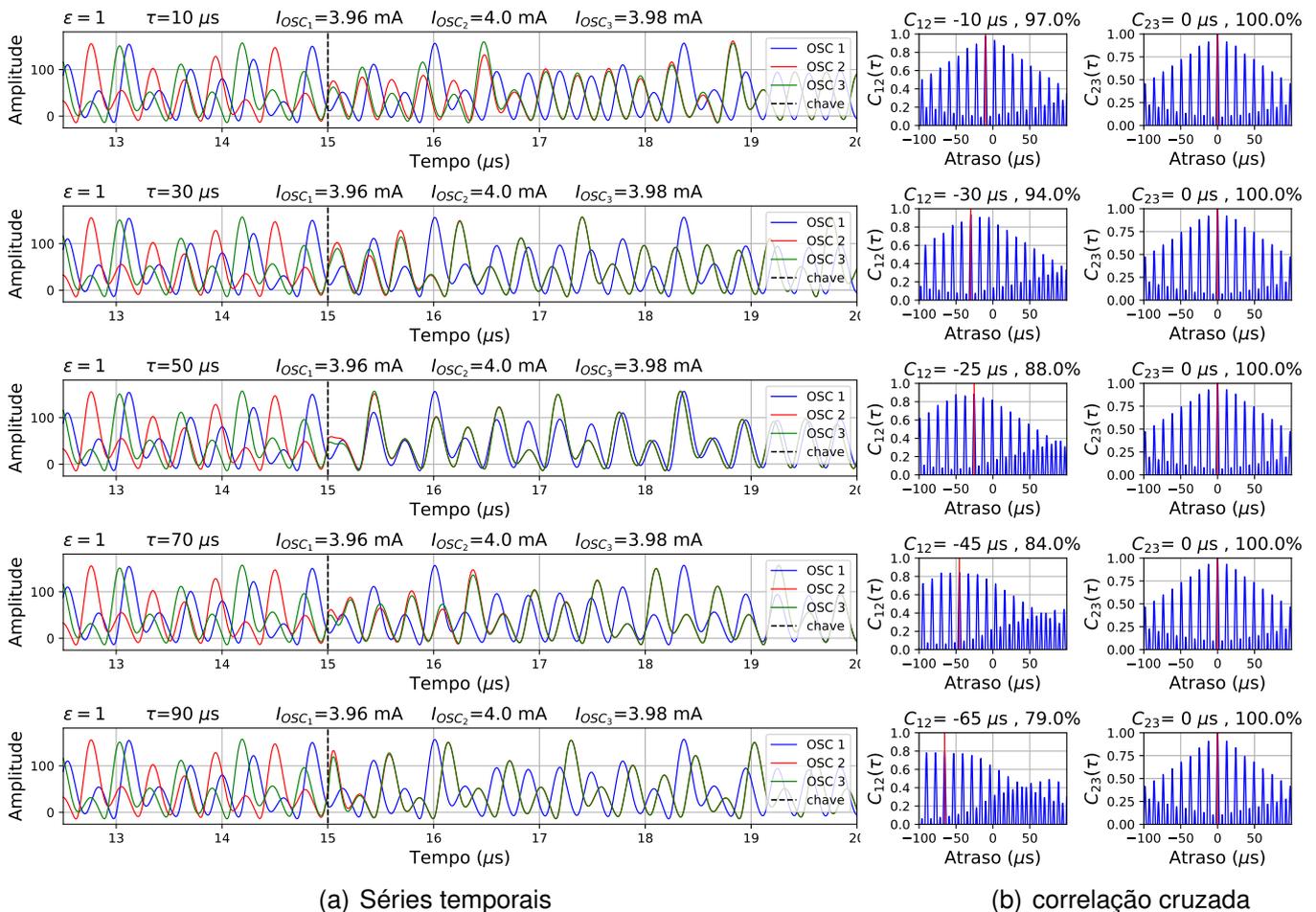
$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{g^*}{Q(1-k)} \left[-\alpha_F n(-y_2(t)) + z_2(t) \right] \\ \dot{y}_2 = \frac{g^*}{QK} \left[(1 - \alpha_F) n(-y_2(t)) + z_2(t) \right] - \epsilon \left[y_2(t) - y_1(t - \tau) \right] \\ \dot{z}_2 = -\frac{QK(1-k)}{g^*} \left[x_2(t) + y_2(t) \right] - \frac{1}{Q} z_2(t) \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \frac{g^*}{Q(1-k)} \left[-\alpha_F n(-y_3(t)) + z_3(t) \right] \\ \dot{y}_3 = \frac{g^*}{QK} \left[(1 - \alpha_F) n(-y_3(t)) + z_3(t) \right] - \epsilon \left[y_3(t) - y_1(t - \tau) \right] \\ \dot{z}_3 = -\frac{QK(1-k)}{g^*} \left[x_3(t) + y_3(t) \right] - \frac{1}{Q} z_3(t) \end{cases} \quad (5.10)$$

De maneira similar ao sistema anterior com dois osciladores, para se ter osciladores ligeiramente diferentes foram estabelecidas correntes distintas para cada um dos osciladores, por meio da variável g^* ($g_1^* = 25.1$, $g_2^* = 25.3$ e $g_3^* = 25.2$). Utilizando-se condições iniciais independentes, sorteadas randomicamente, foram obtidas as soluções numéricas para os sistemas, as quais são apresentadas na Figura36. Observa-se que as séries temporais e suas respectivas correlações cruzadas para os pares de osciladores do sistema apresentadas. A correlação cruzada entre os osciladores 1 e 3 não

foram exibidas, pois apesar dos sistemas serem diferentes, sua topologia é simétrica, fazendo com que os osciladores 2 e 3, sincronizem-se ao oscilador central, fazendo com que a correlação cruzada dos osciladores 2 e 3 em comparação ao oscilador 1 sejam iguais.

Figura 36 – (a) Séries temporais e (b) correlações cruzadas entre os osciladores OSC1 e OSC2 e entre os osciladores OSC2 e OSC3, acoplados de forma unidirecional como apresentado na Figura 35.



Fonte: Autoria própria.

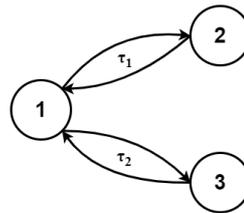
O sinal de correlação cruzada decresce com o aumento do atraso estabelecido entre o oscilador central e os externos, como pode ser observado na Figura 36(b). Dessa forma a sincronização completa ocorre com atraso, entre os osciladores OSC2 ou OSC3 (externos) com o oscilador OSC1 (central). Vemos ainda que as curvas de correlação cruzada entre os osciladores externos (OSC2 e OSC3) são máximas para quando o atraso zero. Esses resultados para osciladores eletrônicos caóticos, indicam sincronização generalizada sem atraso, o que era esperado, devido a semelhança ao

caso apresentado na subseção 5.3.1.

5.3.3 Sincronização por acoplamento bidirecional com atraso

Três osciladores Colpitts foram acoplados bidirecionalmente e com atrasos, com o objetivo de verificar um novo comportamento. A topologia apresentada na Figura 37 já foi experimentada com osciladores lasers (Fischer et al., 2006), no qual emergiu a sincronização *zero-lag*. Nessa subseção iremos verificar se o mesmo comportamento ocorre com a utilização de osciladores Colpitts. Nessa configuração os osciladores externos 2 e 3 estão interagindo através do oscilador central 1 (Figura 37). Os atrasos nas conexões bidirecionais são descritas pelas variáveis τ_1 e τ_2 .

Figura 37 – Diagrama da topologia de rede com três osciladores com acoplamento bidirecional com atraso determinado pelas variáveis τ_1 e τ_2 .



Fonte: Autoria própria.

Os sistemas de equações 5.11, 5.12 e 5.13 descrevem o comportamento dinâmico da rede de osciladores da topologia da Figura 37. Os acoplamentos ocorrem por meio da variável y . As equações de estado para cada um dos osciladores Colpitts estão normalizadas.

$$\begin{cases} dx_1/dt = \frac{g^*}{Q(1-k)} \left[-\alpha_F n(-y_1(t)) + z_1(t) \right] \\ dy_1/dt = \frac{g^*}{QK} \left[(1 - \alpha_F) n(-y_1(t)) + z_1(t) \right] - \epsilon \left[y_1(t) - y_2(t - \tau_1) \right] \\ \quad - \epsilon \left[y_1(t) - y_3(t - \tau_2) \right] \\ dz_1/dt = -\frac{QK(1-k)}{g^*} \left[x_1(t) + y_1(t) \right] - \frac{1}{Q} z_1(t) \end{cases} \quad (5.11)$$

$$\begin{cases} dx_2/dt = \frac{g^*}{Q(1-k)} \left[-\alpha_F n(-y_2(t)) + z_2(t) \right] \\ dy_2/dt = \frac{g^*}{QK} \left[(1 - \alpha_F) n(-y_2(t)) + z_2(t) \right] - \epsilon \left[y_2(t) - y_1(t - \tau_1) \right] \\ dz_2/dt = -\frac{QK(1-k)}{g^*} \left[x_2(t) + y_1(t) \right] - \frac{1}{Q} z_2(t) \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\begin{cases} dx_3/dt = \frac{g^*}{Q(1-k)} \left[-\alpha_F n(-y_3(t)) + z_3(t) \right] \\ dy_3/dt = \frac{g^*}{QK} \left[(1 - \alpha_F) n(-y_3(t)) + z_3(t) \right] - \epsilon \left[y_3(t) - y_1(t - \tau_2) \right] \\ dz_3/dt = -\frac{QK(1-k)}{g^*} \left[x_3(t) + y_3(t) \right] - \frac{1}{Q} z_3(t) \end{cases} \quad (5.13)$$

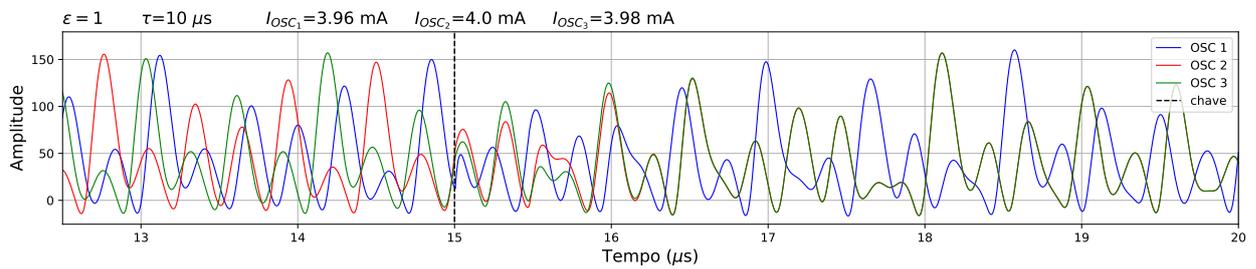
5.3.4 Acoplamento com atrasos iguais entre osciladores Colpitts

Para três osciladores acoplados, segundo a topologia apresentada na Figura 37, calculamos as séries temporais e obtivemos medidas de correlação cruzada entre os osciladores. Esses resultados estão mostrados na figura 38. Com coeficientes de acoplamento $\epsilon = 1$ e com atrasos idênticos, ($\tau_1 = \tau_2 = \tau = 10\mu s$) o acoplamento é acionado após $15\mu s$ para se evitar efeitos transientes. Nos gráficos das séries temporais uma barra de cor preta pontilhada indica o início do acoplamento. Os três osciladores interagem até atingirem a sincronização, onde o oscilador central está sincronizado com atraso em relação aos osciladores externos. Estes dois osciladores, 2 e 3, estão em sincronização completa entre si (Boccaletti et al., 2002) e sem atraso (zero-lag) (Fischer et al., 2006).

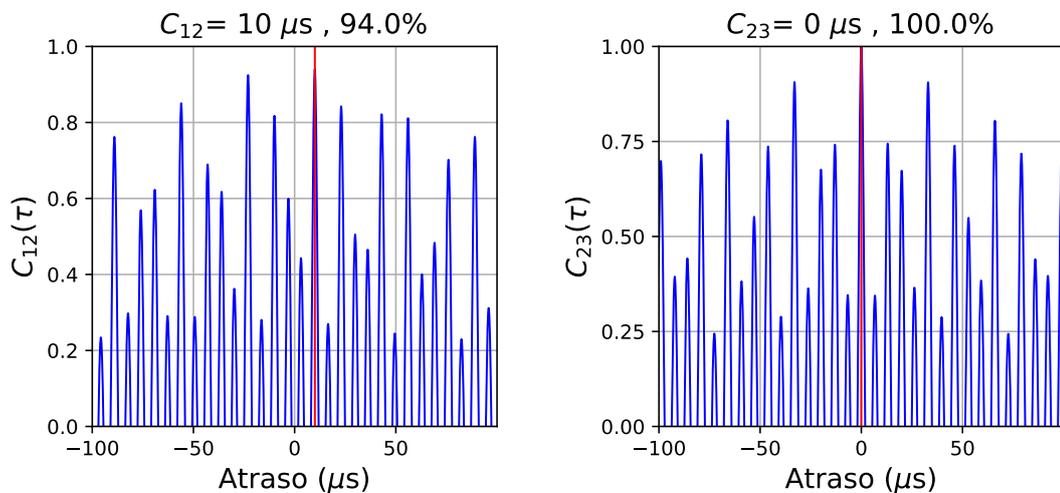
A sincronização sem atraso é confirmada pela figura de mérito 38 (b). Ao observarmos a correlação cruzada, que é uma forma de verificar o quanto dois sinais estão relacionados, observamos que os osciladores externos 2 e 3 estão perfeitamente sincronizados no mesmo instante, ou seja, com uma correlação máxima ($C_{23}(\tau) = 1$) para o atraso zero.

Em comparação, o oscilador central também alcança uma sincronização completa com os osciladores externos, apresentando uma correlação acima de 90%, porém em τ diferente de zero. Isso mostra que também ocorre sincronização, de forma contra-intuitiva, adiantada em relação ao oscilador central.

Figura 38 – Séries temporais para a topologia com três osciladores Colpitts acoplados com atrasos iguais.



(a) Séries temporais



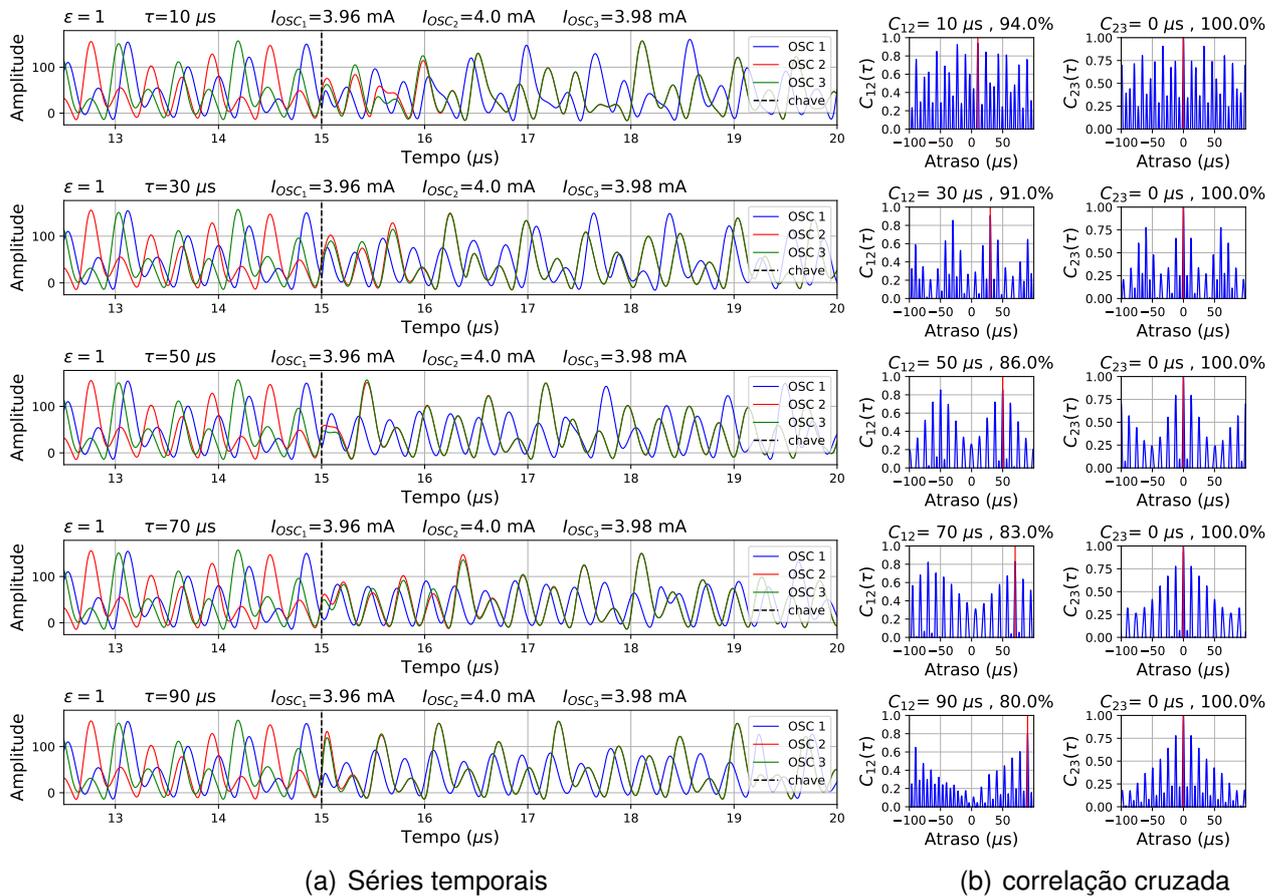
(b) Medida de correlação cruzada normalizada.

Fonte: Autoria própria.

A simulação numérica para atrasos entre $10\mu s$ e $90\mu s$ no acoplamento entre os osciladores é apresentada na Figura 39, no qual observa-se que a sincronização *zero-lag* persiste mesmo para longos atrasos no acoplamento entre os osciladores. Observa-se também que mesmo quando o atraso no acoplamento é aumentado, os osciladores ainda conseguem manter a sincronização *zero-lag*. Observamos também se entre os osciladores da topologia em análise o comportamento permanece para valores maiores de atraso impostos no acoplamento. Como se observa na Figura 40, a correlação C_{23} , que é uma medida de quão perfeitamente os osciladores estão em sincronização *zero-lag*, diminui à medida que o atraso aumenta. Isso indica que, embora os osciladores ainda estejam sincronizados sem atraso, a qualidade dessa sincronização é reduzida quando se é aumentado o atraso no acoplamento. Esperávamos que a correlação entre os osciladores externos e o central (C_{12} e C_{13}) também diminuísse, porém a simulação apresentou comportamento diferente, o que merece uma investigação

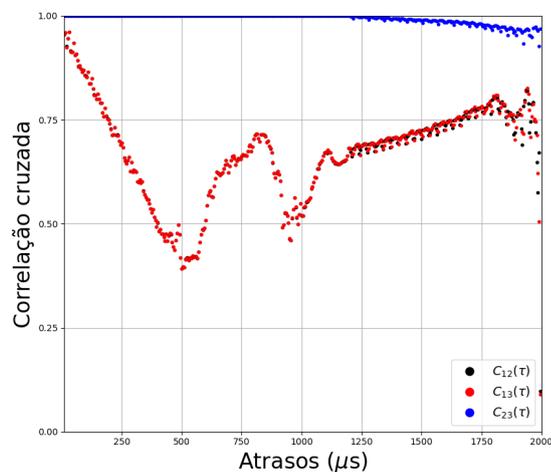
mais cuidadosa *a posteriori*.

Figura 39 – Séries temporais para a topologia com três osciladores Colpitts acoplados com atrasos iguais.



Fonte: Autoria própria.

Figura 40 – Correlação cruzada normalizada máxima entre os osciladores da topologia da Figura 37 em função do atraso τ . Cada ponto é a correlação normalizada máxima para uma simulação da topologia com um determinado valor de atraso que vai de $10\mu s$ até $2000\mu s$.

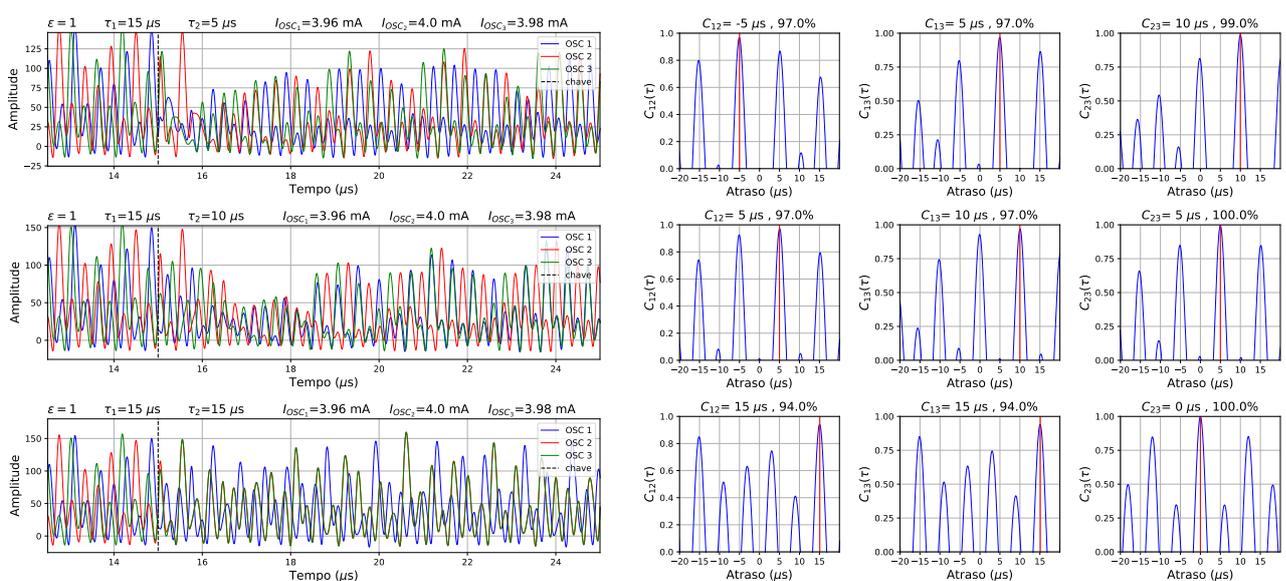


A sincronização *zero-lag* pode parecer contra-intuitivo, pois em sistemas com atrasos de acoplamento significativos, esperar-se-ia que qualquer sincronização fosse acompanhada por um certo atraso temporal. Mas, embora o elemento central possua sincronização com um determinado adiantamento em relação aos osciladores externos, estes conseguem se sincronizar perfeitamente entre si, sem atraso.

5.3.5 Acoplamento com atrasos diferentes

Para o sistema de três osciladores acoplados, descritos pelas equações 5.11, 5.12 e 5.13, investigamos numericamente seu comportamento quando os atrasos possuem valores diferentes. A Figura 41 apresenta os resultados das simulações para três situações diferentes: mantendo-se o tempo de atraso de propagação do sinal do primeiro oscilador fixo em $\tau_1 = 15\mu s$, enquanto o tempo de atraso de propagação dos sinais do segundo e terceiro osciladores τ_2 assume os valores 5, 10 e 15 μs . Observa-se que há um deslocamento na sincronização 'zero-lag' que ocorre devido às diferenças nos tempos de atraso entre os dois osciladores externos e o oscilador central. Especificamente, o atraso entre os osciladores 2 e 3 pode ser calculado pela diferença entre τ_1 e τ_2 .

Figura 41 – Séries temporais para a topologia com três osciladores Colpitts acoplados com atrasos diferentes.



(a) Séries temporais

(b) correlação cruzada

Fonte: Autoria própria.

6 FORMAÇÃO DE CLUSTER SINCRONIZADOS EM REDES DE OSCILADORES ACOPLADOS

Tratamos aqui de sistemas osciladores, onde cada um oscila regido por equações e parâmetros idênticos, e estão conectados de forma a interagir uns aos outros, consequentemente alterando o estado dinâmico dos osciladores isolados. Quando essas interações possuem um acoplamento forte, cada elemento ajusta seu ritmo, podendo haver sincronização generalizada entre grupos de elementos, criando assim, um novo comportamento coletivo.

A sincronização pode acontecer em diferentes formas e escalas, levando à formação de agrupamentos (clusters), ou seja, de conjuntos de osciladores que oscilam em sincronia dentro do sub-grupo. Esses agrupamentos podem surgir espontaneamente ou ser provocados por meio do ajuste de parâmetros específicos de controle.

O estudo da formação sincronizada de clusters envolve a compreensão de como as características individuais dos osciladores, as propriedades da rede de conexão e as condições iniciais podem afetar a dinâmica coletiva do sistema.

Neste capítulo, serão analisados algumas topologias nos quais surgem agrupamentos em redes compostas por osciladores Colpitts operando em regime caótico.

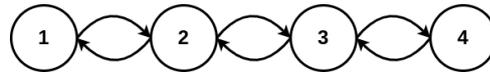
6.1 OSCILADORES CONECTADOS EM CORRENTE: CLUSTERS SINCRONIZADOS

Um sistema de equações diferenciais para osciladores Colpitts é usado para descrever a dinâmica oscilatória de cada circuito, um nó da rede. Foi observado no capítulo 5 que três nós conectados bidirecionalmente com atraso pode apresentar sincronização com atraso zero entre os osciladores separados. Nesta seção será observado como o comportamento persiste para um prolongamento no motivo em corrente.

A rede experimentada nessa seção consiste em quatro osciladores Colpitts idênticos acoplados bidirecionalmente com atraso pré-determinado, com condições iniciais ligeiramente diferentes para cada nó. A topologia da rede é apresentada na Figura 42.

O modelo foi numericamente experimentado, seguindo os mesmos procedimentos do capítulo 5. As séries temporais, resultado das simulações é apresentada na Figura 42 (a).

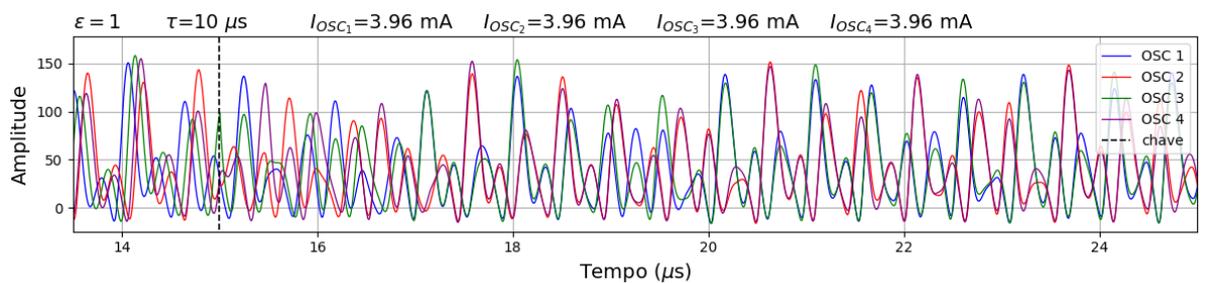
Figura 42 – Diagrama apresentando a topologia para uma rede em formato "corrente" com quatro osciladores Colpitts idênticos acoplados bidirecionalmente com atraso.



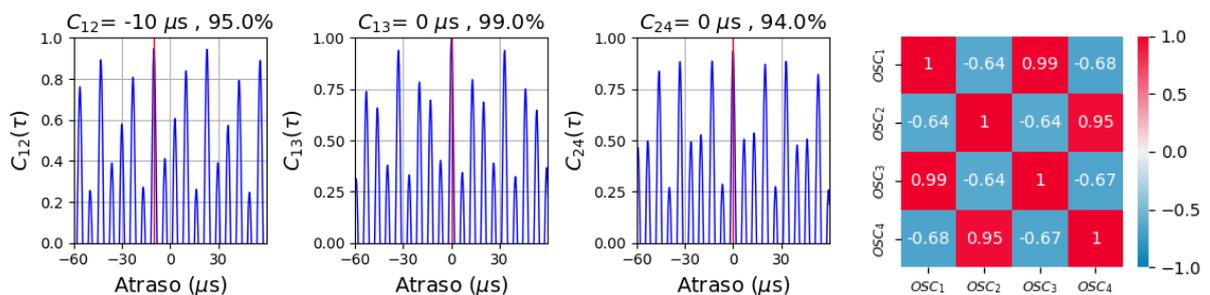
Fonte: Autoria própria.

Para analisar o comportamento coletivo dessa rede, inicialmente os osciladores estão completamente descorrelacionados, como pode-se observar nas séries temporais apresentadas na Figura 43 (a), até que no tempo igual a $15\mu s$, indicado pela barra vertical preta pontilhada, ocorre o acoplamento entre os osciladores. Observa-se então a formação de dois conjuntos de osciladores sincronizados, que podem ser distinguidos pelas cores.

Figura 43 – a) Séries temporais, b) correlação cruzada normalizada e c) matriz de correlação para o coeficiente de Pearson, para a rede de osciladores da topologia em corrente apresentada na Figura 42 com um acoplamento com atraso $\tau = 10$ para os osciladores partindo de condições iniciais ligeiramente diferentes e operando com correntes $I_{osc1} = 3.96mA$, $I_{osc2} = 3.96mA$, $I_{osc3} = 3.96mA$ e $I_{osc4} = 3.96mA$.



(a) séries temporais



(b) correlação cruzada normalizada

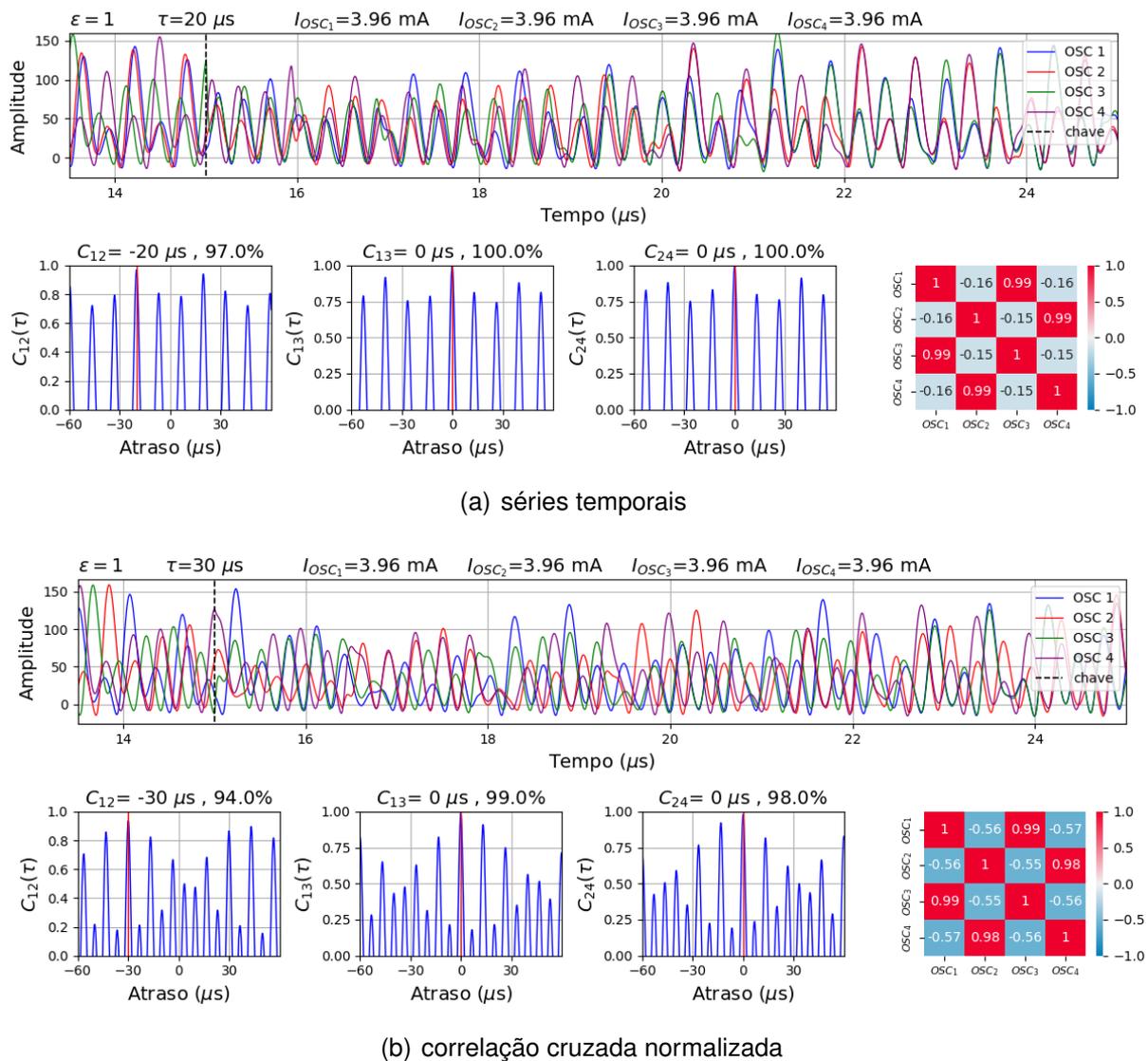
(c) matriz de correlação

Fonte: Autoria própria.

Observando a correlação cruzada e entre os pares de osciladores apresentados na Figura 43 (b), percebe-se que a sincronização zero-lag (ZLS - Zero-Lag Synchronization) ocorre entre os osciladores 1 e 3 e entre os osciladores 2 e 4, ou seja, entre os

osciladores pares e ímpares, os quais possuem correlação máxima com atraso zero (Nixon et al., 2011). Também foi construída a matriz de correlação para o coeficiente de Pearson, que está apresentada na Figura 43 (c). O coeficiente de correlação de Pearson indica estatisticamente se existe uma relação entre duas variáveis, quanto mais próximo de 1, mais fortemente as variáveis estão correlacionadas. O resultado apresentado na matriz de correlação indica a formação de dois grupos fortemente correlacionados, o grupo dos osciladores pares e o grupo dos osciladores ímpares.

Figura 44 – Séries temporais, correlação cruzada normalizada e matriz de correlação para o coeficiente de Pearson, para a rede de osciladores da topologia em corrente apresentada na Figura 42 para outros valores de atrasos no acoplamento (a) $\tau = 20\mu s$ e (b) $\tau = 30\mu s$, com os osciladores partindo de condições iniciais ligeiramente diferentes e operando com correntes $I_{osc1} = 3.96mA$, $I_{osc2} = 3.96mA$, $I_{osc3} = 3.96mA$ e $I_{osc4} = 3.96mA$.



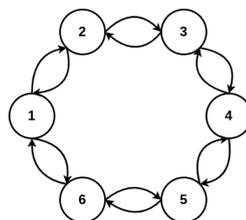
Fonte: Autoria própria.

Também observa-se que existe sincronização com atraso entre o grupo par e o grupo ímpar, exatamente com o valor do atraso τ imposto entre os acoplamentos, como apresentado na Figura 43 (b) em C_{12} , confirmando a sincronização de sub-rede (SLS - *Sublattice Synchronization*)(Nixon et al., 2011). Em seguida, a simulação é realizada para outros valores de atrasos ($\tau = 20\mu s$ e $\tau = 30\mu s$), em que observa-se que ambas as sincronizações, ZLS e SLS, permanecem mas com um pequeno decréscimo de acordo com o aumento do atraso que é imposto no acoplamento dos osciladores da rede.

6.2 FORMAÇÃO DE CLUSTERS EM OSCILADORES CONECTADOS EM ANEL

Nesta seção será realizada simulações para o caso do motivo em anel, uma rede regular como visto na seção 3.3, o qual foi produzido conectando os nós das extremidades de uma corrente semelhante a da seção anterior mas composta por 6 osciladores. A figura 45 apresenta uma rede regular, em formato de anel composto por seis osciladores Colpitts acoplados bidirecionalmente com atraso τ determinado por meio da variável y das equações de estado que modelam o oscilador Colpitts. As simulações da rede de osciladores foram realizadas em condições em que todos os osciladores tinham condições iniciais diferentes. Utilizando-se parâmetros g^* para que os osciladores operem em regime caótico ($g_1^* = g_2^* = g_3^* = g_4^* = g_5^* = g_6^* = 25.1$) foi simulada a solução para os sistemas acoplados e o resultado é apresentado na Figura 46.

Figura 45 – Diagrama apresentando a topologia para uma rede regular em formato de anel com seis osciladores Colpitts.

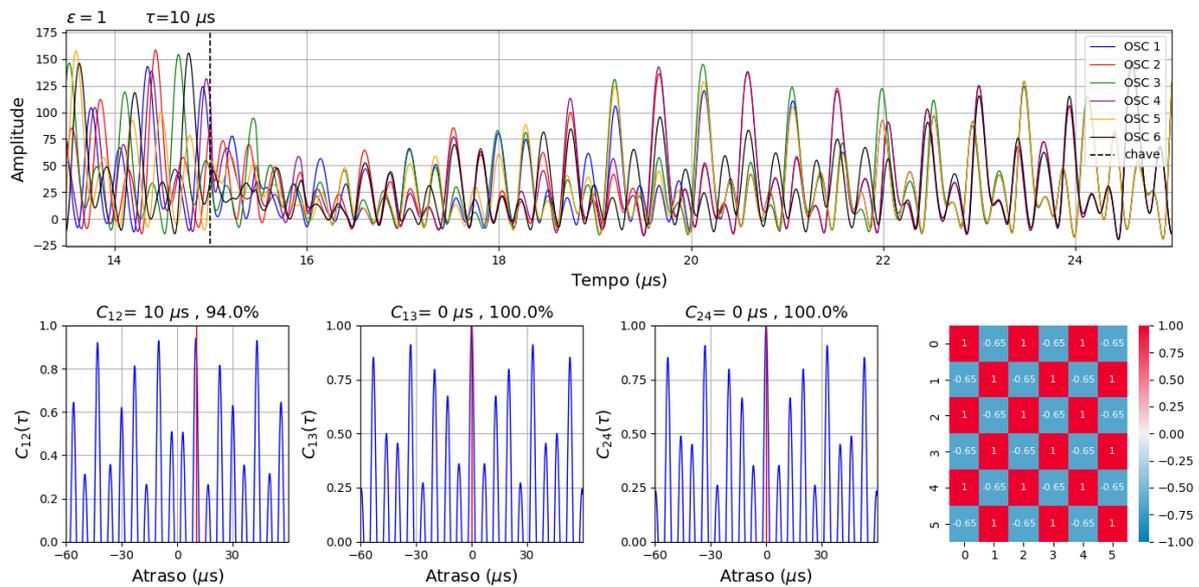


Fonte: Autoria própria.

Estando inicialmente desacoplados os osciladores estão completamente descorrelacionados, como pode ser observado nas séries temporais das variáveis Figura 46. No tempo igual a $15\mu s$, indicado pela barra vertical preta pontilhada na Figura 46

quando ocorre o acoplamento entre os osciladores, forma-se dois conjuntos de osciladores sincronizados. Observando atentamente, percebe-se que a sincronização com atraso zero ocorre para grupos determinados de osciladores: um grupo de osciladores ímpares e outro formado pelos osciladores pares.

Figura 46 – Séries temporais, correlação cruzada normalizada e matriz de correlação de Pearson para a rede de osciladores da topologia em anel apresentada na Figura 45 para o valor de atraso no acoplamento $\tau = 10\mu s$ com os osciladores idênticos operando em regime caótico, todos partindo de condições iniciais ligeiramente diferentes.



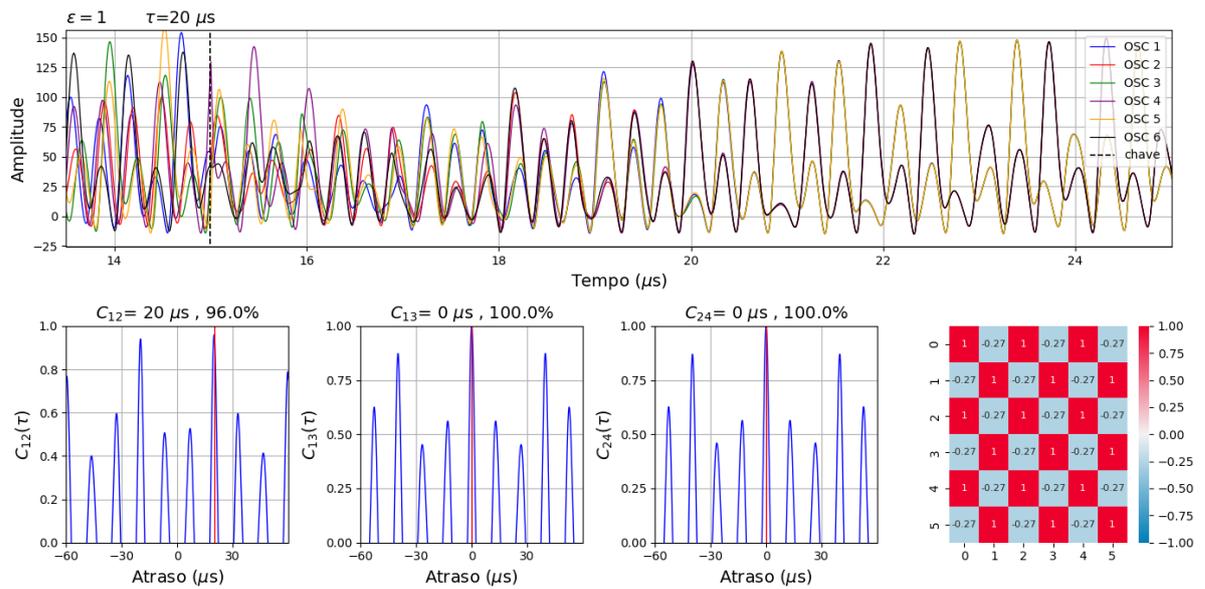
Fonte: Autoria própria.

Para se confirmar o resultado, foi medida a correlação cruzada entre alguns pares de osciladores e também construída uma matriz de correlação de Pearson que estão apresentados na Figura 46. Pode-se observar que a correlação máxima entre o grupo de osciladores ímpares e o grupo de osciladores pares, em que também a correlação cruzada normalizada para o par C_{13} ocorre exatamente em atraso zero, já entre um oscilador ímpar e um par C_{12} a correlação máxima ocorre para $\tau = 10\mu s$, adiantado, evidenciando a presença de dois tipos de sincronização: a sincronização zero-lag (ZLS - *zero-lag synchronization*) entre os osciladores ímpares ou entre os osciladores pares, e a sincronização de sub-rede (SLS - *sublattice synchronization*) (Nixon et al., 2011).

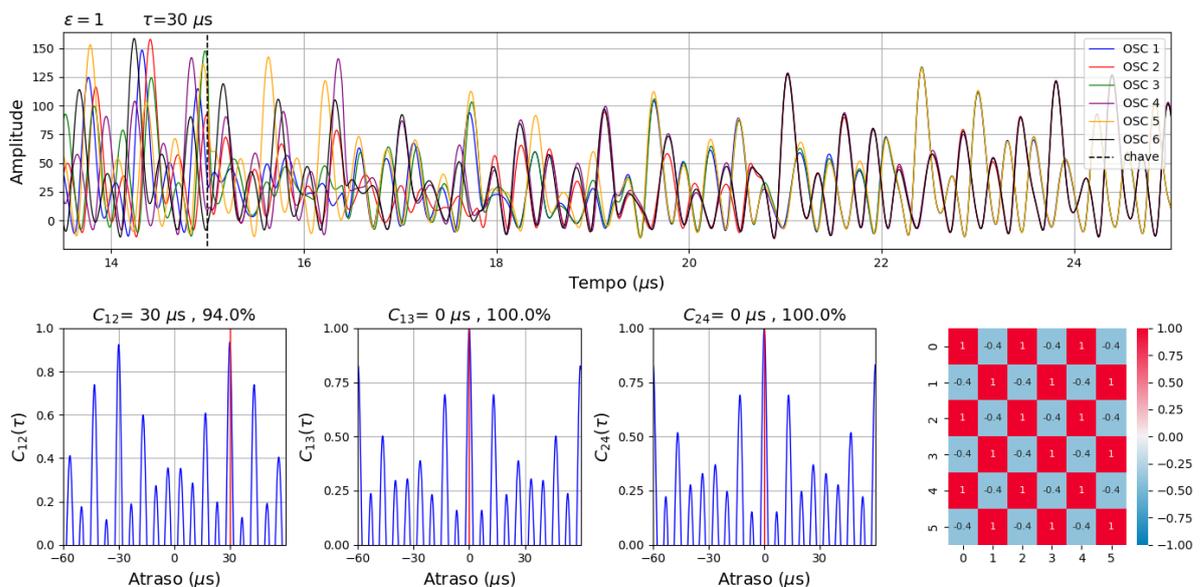
O resultado apresenta a sincronização entre grupos de osciladores que não estão interagindo diretamente entre si (Fischer et al., 2006), estão operando em regime caótico e estão acoplados com atraso, mesmo assim, emerge sincronização na rede. Pode-se realizar uma associação ao caso apresentado no capítulo anterior para 3 os-

ciladores acoplados com atraso. Por exemplo, os osciladores 3 e 5 recebem o mesmo sinal atrasado do oscilador 4, e os osciladores 4 e 6 estão sincronizados pelo sinal atrasado que ambos recebem do oscilador 5 e assim sucessivamente, fazendo assim, surgir dois grupos de osciladores sincronizados.

Figura 47 – Séries temporais, correlação cruzada normalizada e matriz de correlação de Pearson para a rede de osciladores da topologia em anel apresentada na Figura 45 para o valor de atraso no acoplamento (a) $\tau = 20\mu\text{s}$ e (b) $\tau = 30\mu\text{s}$ com os osciladores idênticos operando em regime caótico, todos partindo de condições iniciais levemente diferentes.



(a)



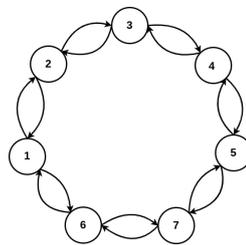
(b)

Fonte: Autoria própria.

Mesmo para atrasos maiores o comportamento permanece, como pode ser observado na Figura 47, em que foram simuladas os casos para o acoplamento com atraso $\tau = 20\mu s$ e $\tau = 30\mu s$.

A sincronização de sub-rede necessita de um número par de osciladores em sua topologia, pois caso contrário, todos os osciladores estarão conectados de certa forma ao mesmo padrão de sinal atrasado. Para verificar esse caso, foi simulada uma rede regular semelhante ao caso já apresentado, mas agora com 7 osciladores Colpitts, a topologia é apresentada na Figura 48.

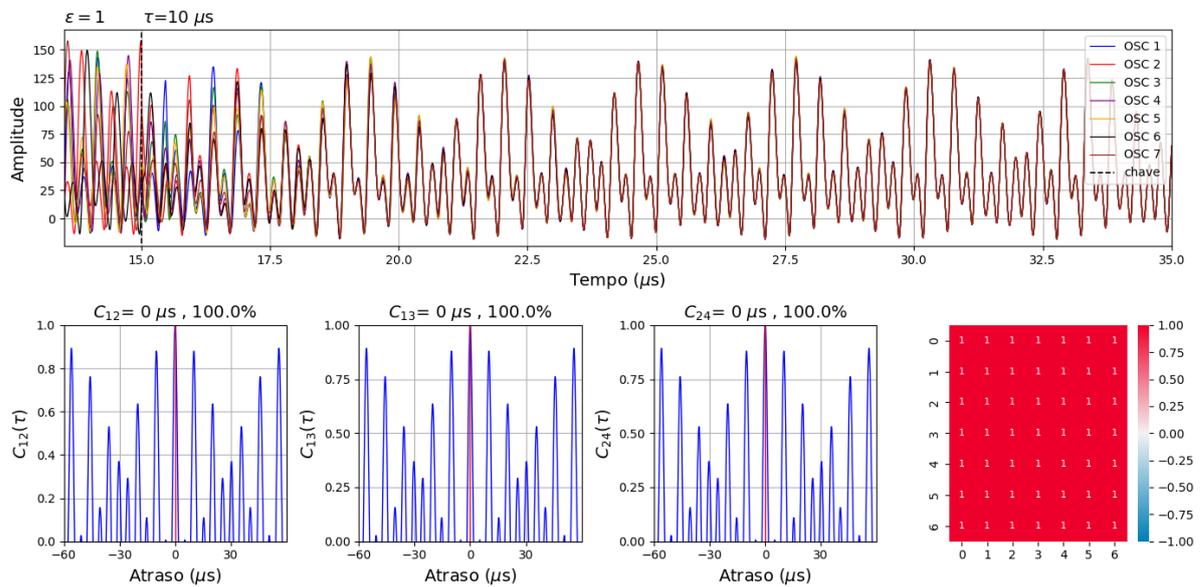
Figura 48 – Diagrama apresentando a topologia para uma rede regular em formato de anel com sete osciladores Colpitts.



Fonte: Autoria própria.

Seguindo o mesmo procedimento realizado anteriormente, pode-se verificar a sincronização zero-lag em toda a rede, por meio da Figura 49. De fato, a 49 apresenta a correlação cruzada normalizada entre os osciladores, e o valor é máximo para o atraso igual a zero, entre osciladores ímpares e entre um par e um ímpar, confirmando a sincronização completa e com zero-lag para todos os osciladores do anel, o que pode ser observado também na matriz de correlação de Pearson e na série temporal.

Figura 49 – Séries temporais, correlação cruzada normalizada e matriz de correlação de Pearson para a rede de sete osciladores da topologia em anel apresentada na Figura 48 para um atraso no acoplamento $\tau = 10\mu s$ com os osciladores idênticos operando em regime caótico, todos partindo de condições iniciais levemente diferentes.



Fonte: Autoria própria.

7 SINCRONIZAÇÃO EXPERIMENTAL DE OSCILADORES COLPITTS

Com o objetivo de realizar a montagem experimental para observar a sincronização de osciladores em regime caótico, foram desenvolvidos circuitos para os osciladores Colpitts para operar tanto em regime permanente como em regime caótico, além disso, também foram desenvolvidos módulos para atrasar os sinais caóticos produzidos pelos osciladores, ambos serão apresentados neste capítulo.

7.1 CIRCUITO ELETRÔNICO PARA O OSCILADOR COLPITTS

O oscilador Colpitts é um oscilador de alta frequência que gera a partir de uma corrente contínua um sinal oscilante de frequência determinada em sua saída, como visto no capítulo 4. O oscilador Colpitts tem um princípio de funcionamento em qual a realimentação é obtida por uma derivação capacitiva e é classificado como um oscilador classe C, os quais funcionam com o princípio de "*kick-and-resonate*", que significa que a ressonância do circuito proporciona uma realimentação necessária em sua entrada fazendo com que o circuito permaneça em oscilação.

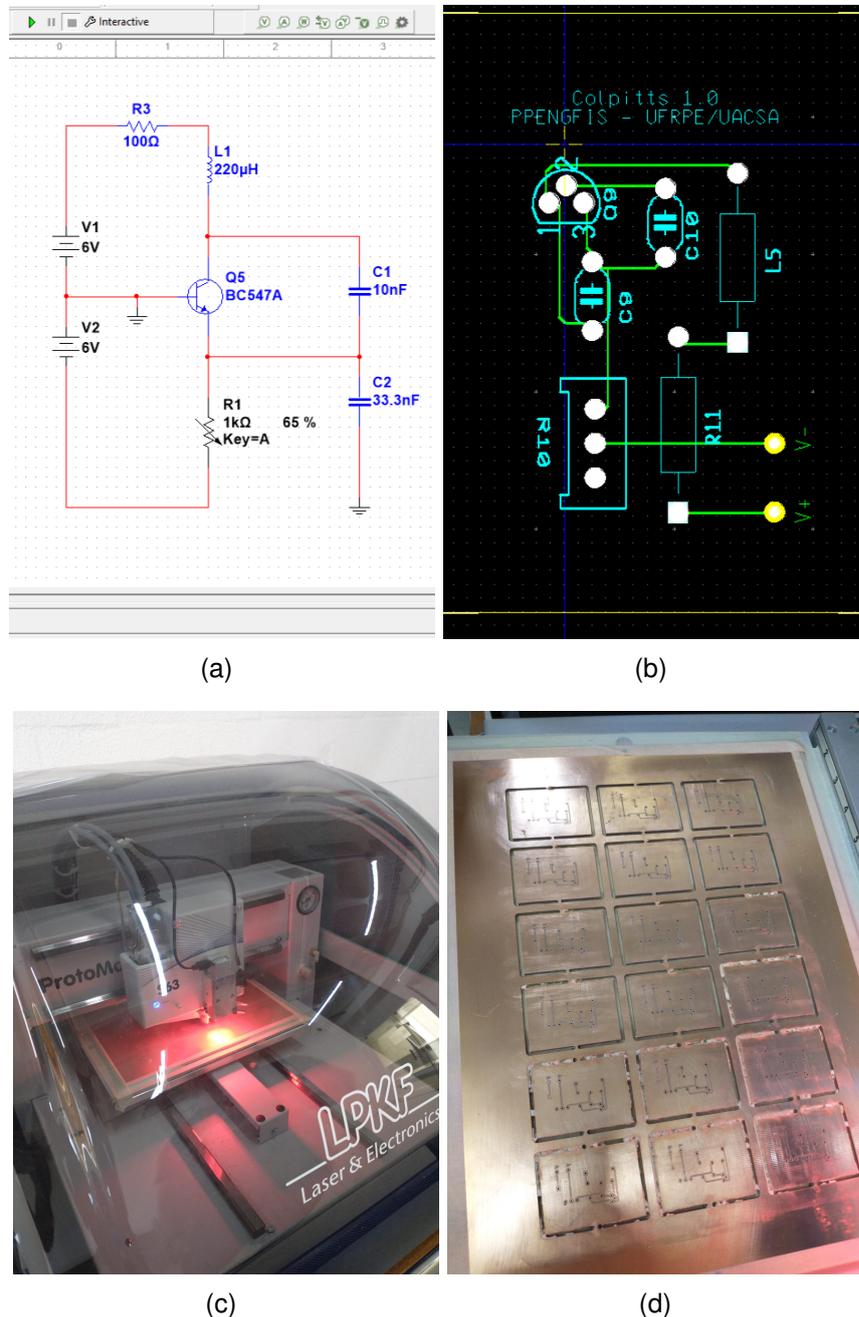
A configuração escolhida para o circuito foi base comum, em que a ligação da base do transistor é conectada ao ponto comum do circuito, pois em comparação com a emissor foi observada um maior ganho amplitude na oscilação.

Iniciamos com a simulação do circuito, como apresentado no capítulo 4, em que foram selecionados dos componentes necessários para a montagem do circuito, como o transistor BC547, capacitores, indutores, resistores e fontes de alimentação. Os componentes foram escolhidos a partir da biblioteca de componentes do software de simulação de circuitos eletrônicos Multisim. Os componentes foram conectados de acordo com o esquema elétrico do projeto e respeitando as polaridades e valores dos elementos como esquematizados na Figura 50 (a). Em seguida foram realizadas simulações para verificar o funcionamento correto do circuito, ajustando os valores dos componentes e as conexões, conforme necessário, para atingir o desempenho necessário ao experimento em termos de frequência e regime de operação (periódico ou caótico).

Após testes no simulador de circuitos eletrônicos, foi iniciado o projeto do circuito

eletrônico em software de desenho Figura 50 (b).

Figura 50 – Imagem (a) circuito montado no ambiente de simulação do Multisim, (b) projeto da placa de circuito no ambiente do Ultiboard, (c) prototipadora de circuitos eletrônicos LPKF S63 e (d) circuitos Colpitts impresso em PCB.



Fonte: Autoria própria.

O projeto foi replicado para que obtivéssemos aproveitamento máximo da PCB, e por fim, todos os arquivos CAD foram convertidos para o formato Gerber (formato utilizado pela prototipadora) na exportação final do projeto.

O circuito foi produzido por meio da prototipadora de circuitos eletrônicos LPKF

S63 que está apresentado na Figura 50 (c), a qual utiliza um processo de fresagem para criar protótipos eletrônicos de alta precisão. A placa produzida com 18 unidades do oscilador Colpitts é mostrada na Figura 50 (d). O processo de impressão inicia-se com a configuração da máquina, onde a placa de circuito impresso (PCB) é fixada na plataforma da LPKF S63. Durante o processo as ferramentas de fresagem apropriadas são selecionadas e instaladas na máquina.

A LPKF S63 utiliza uma fresa de alta precisão para remover o material da placa de cobre de acordo com o design do circuito. Este processo cria trilhas de cobre isoladas e *pads* necessários para os componentes eletrônicos. Em seguida, além de fresar as trilhas, a máquina também perfura orifícios para vias e componentes através do PCB. Por fim, após a fresagem e perfuração, a placa pode passar por processos adicionais, como limpeza e aplicação de uma camada de verniz de proteção, para preparar a PCB para a soldagem dos componentes. Após a soldagem dos componentes a placa foi testada apresentando tanto o regime periódico quanto o caótico.

7.2 MÓDULO DE ATRASO

O acoplamento com atraso, necessário para realizar experimentos em que será possível observar a sincronização *zero-lag*, foi projetado de maneira a produzir um atraso em um sinal caótico.

Para isso, foram investigados três métodos para implementar um atraso nos osciladores Colpitts: atraso digital com conversores e um microcontrolador, linha de transmissão com indutores e capacitores e defasador de banda larga utilizando amplificadores operacionais.

7.2.1 Atraso digital com conversores e um microcontrolador

Uma maneira eficaz de implementar um atraso em um sinal de oscilador é por meio do uso de um microcontrolador equipado com conversores analógico-digital (ADC) e digital-analógico (DAC). Esse método envolve a conversão do sinal analógico do oscilador para um formato digital, a aplicação do atraso desejado e a reconversão do sinal para o formato analógico, permitindo sua utilização subsequente no circuito, seu esquema é apresentado na Figura 51.

Figura 51 – Esquema para implementação de atraso com conversores e um microcontrolador



Fonte: Autoria própria.

Primeiramente, o sinal analógico do oscilador é conectado à entrada do ADC do microcontrolador, onde ocorre a conversão do sinal analógico para o formato digital. Em seguida, o microcontrolador armazena os valores digitalizados em um *buffer* circular. Para aplicar o atraso desejado, o microcontrolador lê os valores do *buffer* utilizando um índice deslocado, introduzindo assim o atraso no sinal digital.

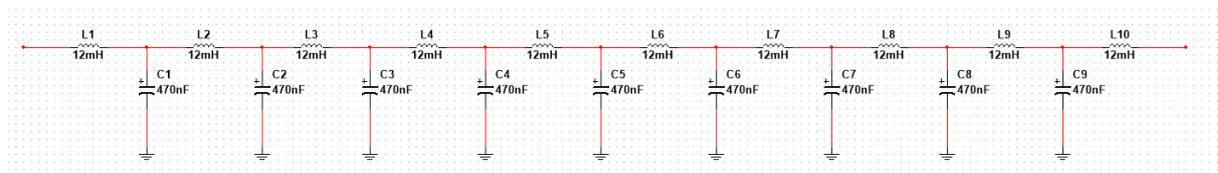
Depois de processar o atraso, o microcontrolador envia o sinal digital atrasado ao DAC, que realiza a conversão de volta para o formato analógico. Finalmente, o sinal analógico atrasado gerado pelo DAC é conectado ao circuito onde o atraso é necessário, completando o processo de introdução do atraso no sinal do oscilador. Esse método proporciona uma maneira precisa e controlada de aplicar atrasos em sinais, sendo útil em diversas aplicações de sistemas dinâmicos e eletrônica.

Embora o uso de microcontroladores ofereça precisão e controle, ele apresenta desvantagens financeiras significativas. Os microcontroladores com ADCs e DACs integrados, juntamente com os componentes adicionais necessários, podem ser relativamente caros. Além disso, a implementação e programação desses dispositivos exigem conhecimentos específicos, resultando em custos adicionais relacionados ao tempo de desenvolvimento. A manutenção e atualização contínuas de sistemas baseados em microcontroladores também podem incorrer em custos e tempo adicionais, devido à necessidade de intervenções técnicas e atualizações de *firmware*. Por fim, o tempo necessário para projetar, testar e validar o sistema poderia atrasar a conclusão do projeto, os quais foram os motivos para a não utilização desse método em nosso projeto.

7.2.2 Linha de transmissão com indutores e capacitores

Outra abordagem para criar um atraso no sinal caótico é utilizar uma linha de transmissão composta por indutores e capacitores. Esta linha de transmissão atua como um filtro passa-baixa, atrasando o sinal à medida que ele se propaga ao longo da linha, seu esquema é apresentado na Figura 52.

Figura 52 – Esquema de uma linha de atraso formada por capacitores e indutores.



Fonte: Autoria própria.

Inicialmente, os valores dos indutores e capacitores são calculados com base na frequência de operação do oscilador e no atraso desejado. Uma vez determinados esses valores, os componentes são montados em série e paralelo, respectivamente, para formar uma linha de transmissão artificial. Por fim, a linha de transmissão é conectada entre o oscilador e o ponto do circuito onde o atraso é necessário. Este método oferece uma solução prática para a introdução de atraso em sinais, aproveitando as propriedades de filtragem dos componentes passivos para ajustar o tempo de propagação do sinal no circuito.

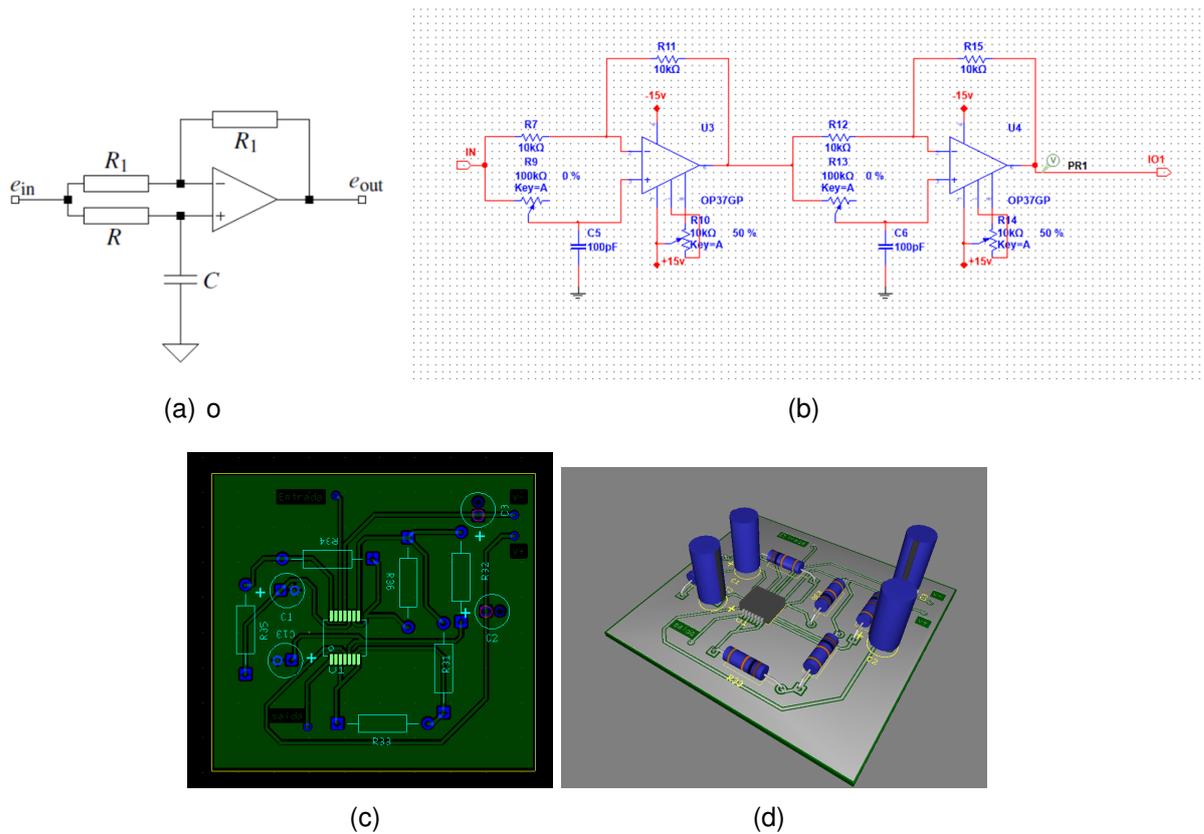
A implementação de uma linha de transmissão com indutores e capacitores pode exigir um maior espaço no layout da placa de circuito impresso, o que pode ser um problema para projetos com restrições de tamanho. Além disso, a eficácia do atraso introduzido pela linha de transmissão é altamente dependente das tolerâncias dos componentes utilizados (indutores e capacitores). Variações nos valores desses componentes podem resultar em um atraso impreciso, e por isso o método não foi utilizado no projeto.

7.2.3 Defasador de banda larga com amplificadores operacionais

O método escolhido para implementar o atraso neste projeto foi um defasador de banda larga, utilizando amplificadores operacionais. Este método consiste em utilizar

uma série de amplificadores operacionais em configuração de filtro passa-tudo, conectados em cascata, para criar um atraso no sinal. O filtro passa-tudo não produz variações na amplitude do sinal de entrada, ou seja, não tem ganho, mas introduz uma diferença de fase ao longo da frequência, por esse motivo é conhecido também como filtro defasador e está apresentado na Figura 53 (a).

Figura 53 – Diagrama de (a) filtro passa tudo, (b) defasador de banda larga, (c) projeto do módulo de atraso no ambiente Ultiboard e (d) visualização 3D do projeto do módulo de atraso.



Fonte: Autoria própria.

Para manter a integridade do sinal, foram utilizados dois filtros defasadores em cascata, o que permite distribuir a carga de filtragem, resultando em um atraso do sinal mais uniforme e controlado, com menos distorção e maior precisão na resposta de fase. Além disso, para manter a unidirecionalidade do sinal, foram colocados amplificadores na configuração buffer tanto na entrada como na saída do módulo. O projeto final pode ser visualizado na Figura 53.

Devido a alta frequência e a banda larga do sinal caótico produzido pelo oscilador Colpitts, foi necessário utilizar o amplificador operacional de alta velocidade NJM2138 com encapsulamento SMD. As principais características desse amplificador operacio-

nal incluem uma banda ultra larga de 200 MHz, uma alta taxa de variação de $45\text{V}/\mu\text{s}$, baixa corrente de operação de 2,27 mA e tecnologia bipolar. Essas especificações permitem que o NJM2138 ofereça desempenho superior em termos de velocidade.

Após o desenvolvimento do projeto o circuito foi produzido e montado. Na sua fase de testes apresentou um nível de ruído, impossibilitando a sua implementação no projeto. Por esse motivo ainda estão sendo realizadas investigações para identificar a origem desse ruído excepcionalmente grande e minimiza-lo, para que se possibilite a montagem do experimento de sincronização com atraso.

7.3 SINCRONIZAÇÃO POR ACOPLAMENTO RESISTIVO ENTRE OSCILADORES COLPITTS

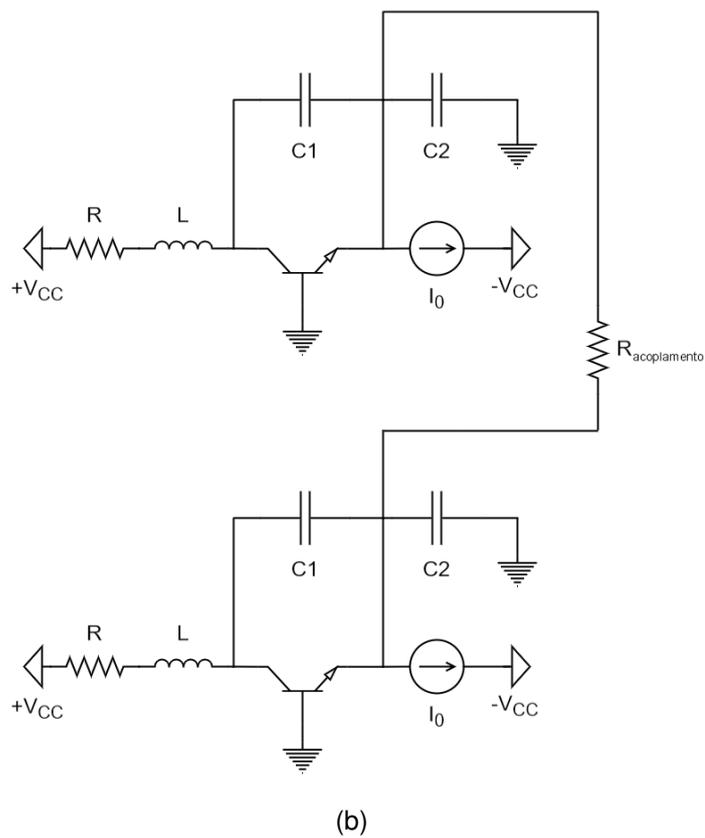
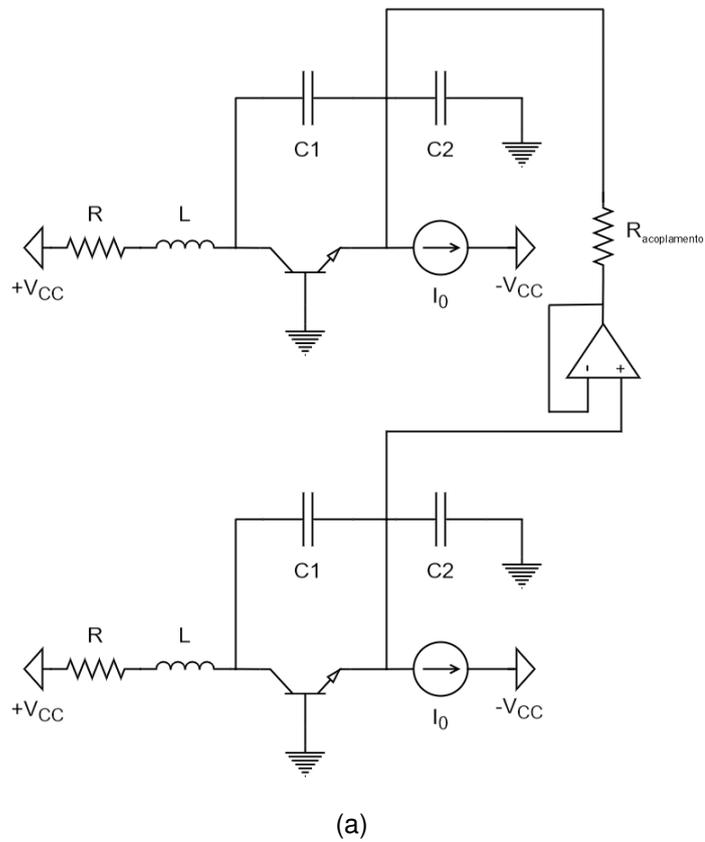
Para observar a sincronização por acoplamento unidirecional do tipo resistivo, conectamos dois osciladores Colpitts por meio da tensão no capacitor 2 utilizando uma resistência de acoplamento.

Foram utilizados os valores para os componentes conforme os utilizados no capítulo 5, sempre com valores de correntes ligeiramente diferentes para o oscilador operando em regime caótico.

Acoplamos os dois osciladores ligando as duas saídas de tensão no capacitor C_2 através de um resistor 54, e analisamos sua resposta com o resistor igual a 500Ω .

Para que o acoplamento seja unidirecional foi necessário utilizar um isolador no qual o sinal acoplado seja direcionado em um único sentido. Isso foi feito por meio da utilização de amplificador em configuração *Buffer* de tensão, um circuito simples que possui uma alta resistência de entrada e não altera a amplitude do sinal de entrada.

Figura 54 – Diagrama da montagem experimental para o acoplamento resistivo (a) unidirecional e (b) bidirecional.



Fonte: Autoria própria.

O circuito da Figura 54 (a) mostra o projeto do circuito elétrico, com dois osciladores acoplados por um amplificador operacional atuando como *buffer* de tensão, e como o *buffer* copia somente a tensão adicionamos um resistor ($R_{acoplamento} = 500\Omega$) com resistência baixa em sua saída, garantindo que a corrente na entrada do amplificador seja próxima da corrente na entrada do oscilador (receptor).

O resultado para a simulação do caso unidirecional é apresentado na Figura 55 (a) e (c). Como esperado, tanto a série temporal como o espaço fase, mostram que a sincronização ocorre.

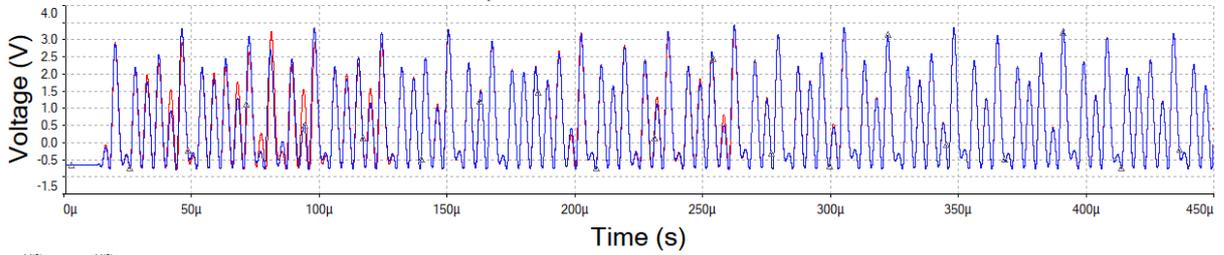
Através da simulação mudamos as características dos dois osciladores percebemos que quando a mudança é feita no receptor não há mudança considerável no emissor. Porém quando se modifica o emissor a resposta era comum para ambos mantendo a sincronização satisfatória.

Também foi realizada a simulação para o caso bidirecional, em que o sinal é livre para percorrer a resistência de acoplamento nos dois sentidos, ou seja, o circuito sem o *buffer*, como apresentado na Figura 54 (b). Os resultados para a simulação estão apresentados na Figura 55 (b) e (d), com sincronização completa entre os osciladores.

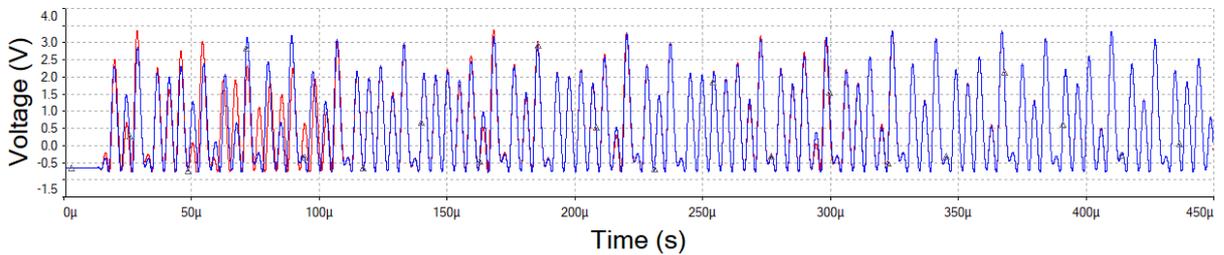
Através dos nossos resultados percebemos que nosso circuito está se comportando de forma caótica tanto na simulação quanto nos resultados experimentais, percebemos que o acoplamento resistivo está de acordo com as nossas simulações numéricas. As pequenas diferenças nos resultados analíticos/simulados para os experimentais são devidos a ruídos e pequenas interferências.

Como próxima etapa, deseja-se realizar experimentalmente o acoplamento com atraso entre os osciladores, nos permitindo observar os comportamentos estudados no capítulo 6.

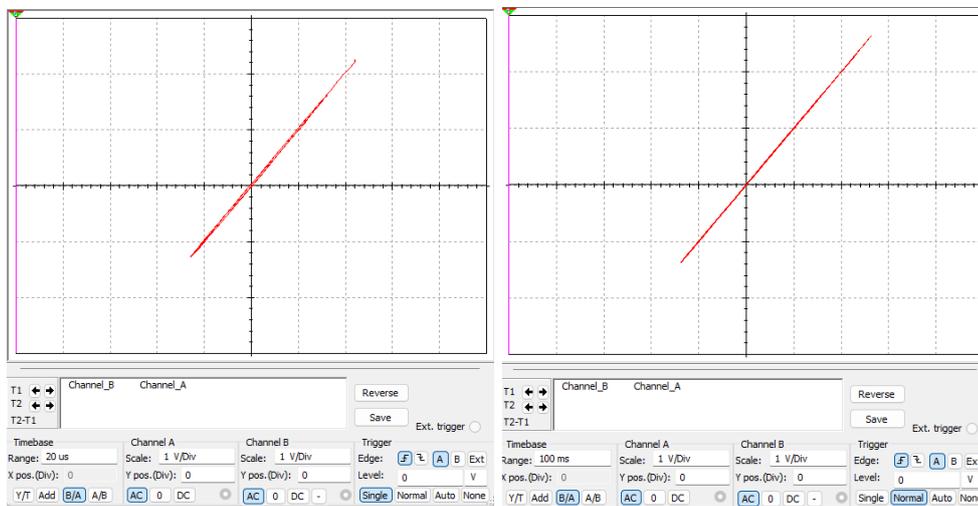
Figura 55 – Série temporal para o acoplamento resistivo (a) unidirecional e (b) bidirecional, ambos simulados no Multisim para os circuitos apresentados na Figura 54. Espaços fase para o caso (c) unidirecional e (d) bidirecional.



(a)



(b)



(c)

(d)

Fonte: Autoria própria.

8 CONCLUSÃO

Nesta dissertação, investigamos a sincronização de osciladores Colpitts operando em regime não-linear, explorando diferentes configurações de acoplamento, tanto unidirecional quanto bidirecional, com e sem atraso. A análise foi realizada utilizando métodos teóricos, simulações numéricas e experimentos em circuitos eletrônicos.

Os resultados obtidos evidenciam que a sincronização é um fenômeno robusto em sistemas dinâmicos caóticos, podendo ocorrer de diversas formas, incluindo a sincronização generalizada e a sincronização *zero-lag*. Observou-se que os osciladores Colpitts podem ser sincronizados de maneira eficiente tanto em topologias simples quanto em redes complexas, apresentando sincronização em diversas topologias.

A formação de *clusters* sincronizados foi observada, demonstrando que grupos de osciladores podem oscilar em sincronia, mesmo em redes com topologias intrincadas. Este comportamento emergente é de grande relevância para a compreensão de sistemas complexos em diversas áreas, como redes neurais, relógios biológicos e sistemas eletrônicos.

Além disso, a sincronização *zero-lag* (sem atraso) mostrou-se especialmente importante na formação de *clusters*, no qual a capacidade de manter a sincronização mesmo com variações nos tempos de atraso no acoplamento ressalta a flexibilidade e a resiliência dos sistemas analisados.

Foram desenvolvidos osciladores Colpitts que operam em regime periódico e não periódico no permitindo replicar diversos experimentos de dinâmica.

O estudo do módulo de atraso desenvolvido nessa dissertação deve ser continuado, pois indica ser promissor para o acoplamento com atraso em experimentos com rede de osciladores.

Por fim, essa dissertação contribui para o entendimento dos mecanismos de sincronização em sistemas caóticos, os quais indicam perspectivas promissoras no desenvolvimento de tecnologias baseadas em sincronização de sistemas dinâmicos, com potencial aplicação em diversas áreas da ciência e da engenharia.

REFERÊNCIAS

- ARENAS, A.; DÍAZ-GUILERA, A.; KURTHS, J.; MORENO, Y.; ZHOU, C. Synchronization in complex networks. **Physics reports**, Elsevier, v. 469, n. 3, p. 93–153, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.09.002>.
- ARONSON, D. G.; ERMENTROUT, G. B.; KOPELL, N. Amplitude response of coupled oscillators. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 41, n. 3, p. 403–449, 1990. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(90\)90007-C](https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90007-C).
- AZADMEHR, M.; PAPROTNY, I.; MARCHETTI, L. 100 years of colpitts oscillators: Ontology review of common oscillator circuit topologies. **IEEE Circuits and Systems Magazine**, IEEE, v. 20, n. 4, p. 8–27, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1109/MCAS.2020.3027334>.
- BARABÁSI, A.-L. **Network Science**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012.
- BOCCALETTI, S.; KURTHS, J.; OSIPOV, G.; VALLADARES, D.; ZHOU, C. The synchronization of chaotic systems. **Physics Reports**, v. 366, n. 1, p. 1–101, 2002. ISSN 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(02\)00137-0](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00137-0).
- BOCCALETTI, S.; LATORA, V.; MORENO, Y.; CHAVEZ, M.; HWANG, D.-U. Complex networks: Structure and dynamics. **Physics reports**, Elsevier, v. 424, n. 4-5, p. 175–308, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009>.
- BOROVKOVA, E. I.; PROKHOROV, M. D.; KISELEV, A. R.; HRAMKOV, A. N.; MIRONOV, S. A.; AGALTSOV, M. V.; PONOMARENKO, V. I.; KARAVAEV, A. S.; DRAPKINA, O. M.; PENZEL, T. Directional couplings between the respiration and parasympathetic control of the heart rate during sleep and wakefulness in healthy subjects at different ages. **Frontiers in Network Physiology**, Frontiers Media SA, v. 2, p. 942700, 2022. DOI: <https://doi.org/10.3389/fnetp.2022.942700>.
- BUSCARINO, A.; FORTUNA, L.; FRASCA, M.; SCIUTO, G. Design of time-delay chaotic electronic circuits. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, IEEE, v. 58, n. 8, p. 1888–1896, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1109/TCSI.2011.2107190>.
- COLPITTS, E. H. **Oscillation generator**. [S.l.]: Google Patents, 1927. US Patent 1,624,537.
- COSENZA, M.; PARRAVANO, A. Dynamics of coupling functions in globally coupled maps: Size, periodicity, and stability of clusters. **Physical Review E**, APS, v. 64, n. 3, p. 036224, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.036224>.
- CROSS, M. C.; ROGERS, J. L.; LIFSHITZ, R.; ZUMDIECK, A. Synchronization by reactive coupling and nonlinear frequency pulling. **Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, APS, v. 73, n. 3, p. 036205, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.036205>.
- ERDOS, P.; RÉNYI, A. et al. On the evolution of random graphs. **Publ. math. inst. hung. acad. sci.**, v. 5, n. 1, p. 17–60, 1960. DOI: <https://doi.org/10.1515/9781400841356.38>.

FISCHER, I.; VICENTE, R.; BULDÚ, J. M.; PEIL, M.; MIRASSO, C. R.; TORRENT, M.; GARCÍA-OJALVO, J. Zero-lag long-range synchronization via dynamical relaying. **Physical review letters**, APS, v. 97, n. 12, p. 123902, 2006. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.123902>.

FLUNKERT, V. **Delay-coupled complex systems: and applications to lasers**. [S.I.]: Springer Science & Business Media, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-20250-6>. ISSN 2190-5053.

FRASCA, M.; GAMBUTTA, L. V.; BUSCARINO, A.; FORTUNA, L. **Synchronization in networks of nonlinear circuits: Essential topics with MATLAB® code**. [S.I.]: Springer, 2018.

GOLDBETER, A.; YAN, J. Multi-synchronization and other patterns of multi-rhythmicity in oscillatory biological systems. **Interface Focus**, The Royal Society, v. 12, n. 3, p. 20210089, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsfs.2021.0089>.

GUTIERREZ, R.; SEVILLA-ESCOBOZA, R.; PIEDRAHITA, P.; FINKE, C.; FEUDEL, U.; BULDU, J. M.; HUERTA-CUELLAR, G.; JAIMES-REATEGUI, R.; MORENO, Y.; BOCCALETTI, S. Generalized synchronization in relay systems with instantaneous coupling. **Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, APS, v. 88, n. 5, p. 052908, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.052908>.

HARTLEY, R. Oscillation-generator. **United States of America Patent**, v. 1, n. 356, p. 763, 1920.

HASSAN, F.; KUMAR, A.; PATI, A. Recent advances in phase locked loops for grid connected systems: A review. In: IEEE. **2022 IEEE Delhi Section Conference (DELCON)**. [S.I.], 2022. p. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1109/DELCON54057.2022.9752810>.

JR, E. R.; OTT, E.; HESS, M. H. Transition to phase synchronization of chaos. **Physical review letters**, APS, v. 80, n. 8, p. 1642, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.1642>.

KARNATAK, R.; RAMASWAMY, R.; PRASAD, A. Amplitude death in the absence of time delays in identical coupled oscillators. **Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, APS, v. 76, n. 3, p. 035201, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.76.035201>.

KURAMOTO, Y. **Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence**. [S.I.]: Springer Berlin, Heidelberg, 1984. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-69689-3>.

LEHNERT, J.; HÖVEL, P.; SELIVANOV, A.; SCHÖLL, E.; DAHLEM, M. A. F. Suppressing spiral wave chaos by adapting the twist factor of spiral waves. **Physical Review E**, v. 93, n. 2, p. 022218, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.022218>.

LIU, Z.; LIN, W.; YU, X.; RODRÍGUEZ-ANDINA, J. J.; GAO, H. Approximation-free robust synchronization control for dual-linear-motors-driven systems with uncertainties and disturbances. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, IEEE, v. 69, n. 10, p. 10500–10509, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1109/TIE.2021.3137619>.

MAGGIO, G. M.; FEO, O. D.; KENNEDY, M. P. Nonlinear analysis of the colpitts oscillator and applications to design. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications**, IEEE, v. 46, n. 9, p. 1118–1130, 1999. DOI: <https://doi.org/10.1109/81.788813>.

MAHMOODI, K.; KERICK, S. E.; GRIGOLINI, P.; FRANASZCZUK, P. J.; WEST, B. J. Complexity synchronization: a measure of interaction between the brain, heart and lungs. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group UK London, v. 13, n. 1, p. 11433, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-023-38622-8>.

MARES, C.; SOLANA, R. E.; ASSANEO, M. F. Auditory-motor synchronization varies among individuals and is critically shaped by acoustic features. **Communications Biology**, Nature Publishing Group UK London, v. 6, n. 1, p. 658, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1038/s42003-023-04976-y>.

MULET, J.; MIRASSO, C.; HEIL, T.; FISCHER, I. Synchronization scenario of two distant mutually coupled semiconductor lasers. **Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics**, IOP Publishing, v. 6, n. 1, p. 97, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1088/1464-4266/6/1/016>.

NEWMAN, M. E. J. **Networks: An Introduction**. [S.l.]: Oxford University Press, 2010.

NIXON, M.; FRIEDMAN, M.; RONEN, E.; FRIESEM, A. A.; DAVIDSON, N.; KANTER, I. Synchronized cluster formation in coupled laser networks. **Physical review letters**, APS, v. 106, n. 22, p. 223901, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.223901>.

OTTOLINA, D.; CAIRO, B.; FOSSALI, T.; MAZZUCCO, C.; CASTELLI, A.; RECH, R.; CATENA, E.; PORTA, A.; COLOMBO, R. Cardiorespiratory coupling in mechanically ventilated patients studied via synchrogram analysis. **Medical & biological engineering & computing**, Springer, v. 61, n. 6, p. 1329–1341, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11517-023-02784-4>.

PECORA, L. M.; CARROLL, T. L. Synchronization in chaotic systems. **Physical review letters**, APS, v. 64, n. 8, p. 821, 1990. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.821>.

PETER, S.; LEINE, R. I. Excitation power quantities in phase resonance testing of nonlinear systems with phase-locked-loop excitation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 96, p. 139–158, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.04.011>.

PIKOVSKY, A.; ROSENBLUM, M.; KURTHS, J.; SYNCHRONIZATION, A. A universal concept in nonlinear sciences. **Cambridge University Press**, v. 2, p. 411, 2001.

QUIROGA, R. Q.; KREUZ, T.; GRASSBERGER, P. Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals. **Physical Review E**, v. 65, n. 4, p. 041903, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.65.041903>.

RESMI, V.; AMBIKA, G.; AMRITKAR, R. General mechanism for amplitude death in coupled systems. **Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics**, APS, v. 84, n. 4, p. 046212, 2011. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.046212>.

-
- RODRIGUES, F. A. **Caracterizaco, classificaco e análise de redes complexas**. 175 p. Tese (Doutrado em Física) — Instituto de Física de São Carlos, São Carlos, 2007.
- ROSENBLUM, M.; KURTHS, J. **Synchronization: a universal concept in nonlinear science**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.
- ROSENBLUM, M. G.; PIKOVSKY, A. S.; KURTHS, J. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. **Physical Review Letters**, APS, v. 78, n. 22, p. 4193, 1997. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.4193>.
- STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering (Cambridge, MA: Westview)**. [S.l.]: Perseus Books Publishing, 1994.
- STROGATZ, S. H. **SYNC: The Emerging Science of Spontaneous Order**. [S.l.]: Hyperion, 2003.
- STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. [S.l.]: CRC press, 2018.
- TOTZ, C. H.; OLMI, S.; SCHÖLL, E. Control of synchronization in two-layer power grids. **Physical Review E**, APS, v. 102, n. 2, p. 022311, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.102.022311>.
- WATTS, D. J.; STROGATZ, S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. **nature**, Nature Publishing Group, v. 393, n. 6684, p. 440–442, 1998.
- ZHAO, J.; HUANG, M.; YAN, H.; CHI, K. T.; ZHA, X. Nonlinear and transient stability analysis of phase-locked loops in grid-connected converters. **IEEE Transactions on Power Electronics**, IEEE, v. 36, n. 1, p. 1018–1029, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1109/TPEL.2020.3000516>.

APÊNDICE A – CÓDIGOS PARA SIMULAÇÃO DE OSCILADORES ACOPLADOS COM ATRASO

O código apresentado implementa a simulação de osciladores Colpitts acoplados com atraso para auxiliar no estudos da dinâmica de sincronização. O código foi construído para simular e analisar o comportamento de múltiplos osciladores acoplados com atraso para diferentes valores de parâmetros, permitindo investigar a interação entre diferentes osciladores e sua sincronização.

A classe `Osc` modela um oscilador Colpitts com equações de estado normalizadas, definindo as equações diferenciais normalizadas que descrevem a dinâmica do oscilador por meio das variáveis de estado x , y , e z , enquanto os parâmetros incluem g^* ; Q , o fator de qualidade; K , a constante relacionada aos capacitores do circuito; e α_F , que controla a não linearidade. O código também permite que o oscilador seja acoplado a até cinco outros osciladores por meio dos parâmetros ϵ_1 , ϵ_2 , e assim por diante, que controlam a força do acoplamento. Adicionalmente, dentro da classe `Osc` inclui-se a possibilidade de adicionar ruído gaussiano às variáveis de estado.

A função `int_delay` implementa a integração numérica das equações de estado do oscilador utilizando o método de Bogacki-Shampine. Durante a integração, as variáveis de estado de osciladores acoplados são combinadas de forma ponderada, introduzindo o atraso de tempo entre eles.

Para medir a semelhança entre os sinais, foi criada a função `corelacao` que realiza a correlação cruzada entre dois sinais normalizados, permitindo identificar a semelhança temporal entre os osciladores e estimar o atraso temporal entre eles. A função `Atraso`, por sua vez, localiza o valor de atraso em que a correlação cruzada é máxima, o que é importante para determinar o tempo de resposta entre os osciladores acoplados.

A classe `criar_oscilador` é utilizada para instanciar os osciladores Colpitts, gerando parâmetros como frequência de oscilação, fator de qualidade, e a constante K a partir de componentes eletrônicos (capacitores, indutores e resistores). Ela também permite variações aleatórias nesses parâmetros para simular pequenas discrepâncias nos componentes do circuito.

A simulação principal, contida no laço `for`, cria a estrutura da topologia a ser estu-

dada, no caso apresentado, três osciladores com pequenas variações em seus parâmetros estão acoplados entre si, no qual a variável τ insere o atraso de acoplamento após um tempo arbitrário. Todos os valores são configurados para permitir uma análise da sincronização em diferentes condições de atraso. O resultado da simulação é plotado em gráficos que mostram a evolução temporal das variáveis de estado dos osciladores e a correlação cruzada entre eles, permitindo uma análise detalhada do comportamento sincronizado.

A combinação do método numérico de integração, a inclusão de atrasos e a análise de correlação permite investigar os efeitos do acoplamento atrasado em osciladores não lineares para diversas topologias, fornecendo *insights* sobre fenômenos complexos de sincronização e dinâmica de sistemas caóticos.

```

1  import numpy as np
   import scipy
3  import matplotlib.gridspec as gridspec
   import matplotlib.pyplot as plt
5  import matplotlib.gridspec as gridspec
   from alive_progress import alive_bar
7  import seaborn as sns
   import pandas as pd
9
10 class Osc:
11     '''Um oscilador colpitts'''
   def __init__(self, t, xyz, parametros, xyz_acop_1=np.array([0,0,0]), epsilon1
       =0, xyz_acop_2=np.array([0,0,0]), epsilon2=0, xyz_acop_3=np.array
       ([0,0,0]), epsilon3=0, xyz_acop_4=np.array([0,0,0]), epsilon4=0,
       xyz_acop_5=np.array([0,0,0]), epsilon5=0):
13
   def n_funcao(x2):
15     if (x2<=1):
       resposta = -x2
17     else:
       resposta = -1
19     return resposta
21
   x,y,z = xyz
   xt1,yt1,zt1 = xyz_acop_1
23   xt2,yt2,zt2 = xyz_acop_2
   xt3,yt3,zt3 = xyz_acop_3
25   xt4,yt4,zt4 = xyz_acop_4
   xt5,yt5,zt5 = xyz_acop_5
27
   g_estrela, Q, K, alphaF, Qzero = parametros

```

```

29     #Equacoes de estado normalizadas
31     self.x= (g_estrela/(Q*(1-K)))*(-alphaF*n_funcao(y)+z)
        self.y = (g_estrela/(Q*K))*((1-alphaF)*n_funcao(y)+z) -Qzero*(1-K)*y -
            epsilon1*(y-yt1)-epsilon2*(y-yt2)-epsilon3*(y-yt3)-epsilon4*(y-yt4)-
            epsilon5*(y-yt5)
33     self.z = -(((Q*K)*(1-K))/(g_estrela))*(x+y) - (1/Q)*z

35     #parametros para adicionar ruido
        media_ruido = 0
37     ampl_ruido = 1*10**-3
        noise = np.random.normal(media_ruido,ampl_ruido,(1,3))
39
        self.saida = np.array([self.x, self.y, self.z]) #+ noise[0]
41
def int_delay(F, t, h, xyz, parametros,
43         xyz1_t=np.array([0,0,0]), xyz1_t_1=np.array([0,0,0]), acop1=0,
        xyz2_t=np.array([0,0,0]), xyz2_t_1=np.array([0,0,0]), acop2=0,
45         xyz3_t=np.array([0,0,0]), xyz3_t_1=np.array([0,0,0]), acop3=0,
        xyz4_t=np.array([0,0,0]), xyz4_t_1=np.array([0,0,0]), acop4=0,
47         xyz5_t=np.array([0,0,0]), xyz5_t_1=np.array([0,0,0]), acop5=0)
        :

49     '''Integracao, saida integrada com atraso'''

51     if t>=0:

53         K1 = F(t, xyz, parametros, xyz1_t, acop1, xyz2_t, acop2, xyz3_t,
            acop3, xyz4_t, acop4, xyz5_t, acop5).saida

55         Xint11 = (h/8)*(F(t, xyz, parametros, xyz1_t, acop1, xyz2_t, acop2,
            xyz3_t, acop3, xyz4_t, acop4, xyz5_t, acop5).saida-F(t, xyz,
            parametros, xyz1_t_1, acop1, xyz2_t_1, acop2, xyz3_t_1, acop3,
            xyz4_t_1, acop4, xyz5_t_1, acop5).saida) + 0.5*(xyz1_t+xyz1_t_1)
        Xint12 = (h/8)*(F(t, xyz, parametros, xyz1_t, acop1, xyz2_t, acop2,
            xyz3_t, acop3, xyz4_t, acop4, xyz5_t, acop5).saida-F(t, xyz,
            parametros, xyz1_t_1, acop1, xyz2_t_1, acop2, xyz3_t_1, acop3,
            xyz4_t_1, acop4, xyz5_t_1, acop5).saida) + 0.5*(xyz2_t+xyz2_t_1)
57         Xint13 = (h/8)*(F(t, xyz, parametros, xyz1_t, acop1, xyz2_t, acop2,
            xyz3_t, acop3, xyz4_t, acop4, xyz5_t, acop5).saida-F(t, xyz,
            parametros, xyz1_t_1, acop1, xyz2_t_1, acop2, xyz3_t_1, acop3,
            xyz4_t_1, acop4, xyz5_t_1, acop5).saida) + 0.5*(xyz3_t+xyz3_t_1)
        Xint14 = (h/8)*(F(t, xyz, parametros, xyz1_t, acop1, xyz2_t, acop2,
            xyz3_t, acop3, xyz4_t, acop4, xyz5_t, acop5).saida-F(t, xyz,
            parametros, xyz1_t_1, acop1, xyz2_t_1, acop2, xyz3_t_1, acop3,
            xyz4_t_1, acop4, xyz5_t_1, acop5).saida) + 0.5*(xyz4_t+xyz4_t_1)
59         Xint15 = (h/8)*(F(t, xyz, parametros, xyz1_t, acop1, xyz2_t, acop2,

```

```

        xyz3_t, acop3, xyz4_t, acop4, xyz5_t, acop5).saida-F(t, xyz,
        parametros, xyz1_t_1, acop1, xyz2_t_1, acop2, xyz3_t_1, acop3,
        xyz4_t_1, acop4, xyz5_t_1, acop5).saida) + 0.5*(xyz5_t+xyz5_t_1)
61
        K2 = F(t+h/2, xyz + K1*h/2, parametros, Xint11, acop1, Xint12, acop2,
        Xint13, acop3, Xint14, acop4, Xint15, acop5).saida
63
        Xint21 = (h/64)*(3*F(t, xyz, parametros, xyz1_t, acop1, xyz2_t, acop2
        , xyz3_t, acop3, xyz4_t, acop4, xyz5_t, acop5).saida-9*F(t, xyz,
        parametros, xyz1_t_1, acop1, xyz2_t_1, acop2, xyz3_t_1, acop3,
        xyz4_t_1, acop4, xyz5_t_1, acop5).saida) + (5*xyz1_t+27*xyz1_t_1)
        /32
65
        Xint22 = (h/64)*(3*F(t, xyz, parametros, xyz1_t, acop1, xyz2_t, acop2
        , xyz3_t, acop3, xyz4_t, acop4, xyz5_t, acop5).saida-9*F(t, xyz,
        parametros, xyz1_t_1, acop1, xyz2_t_1, acop2, xyz3_t_1, acop3,
        xyz4_t_1, acop4, xyz5_t_1, acop5).saida) + (5*xyz2_t+27*xyz2_t_1)
        /32
        Xint23 = (h/64)*(3*F(t, xyz, parametros, xyz1_t, acop1, xyz2_t, acop2
        , xyz3_t, acop3, xyz4_t, acop4, xyz5_t, acop5).saida-9*F(t, xyz,
        parametros, xyz1_t_1, acop1, xyz2_t_1, acop2, xyz3_t_1, acop3,
        xyz4_t_1, acop4, xyz5_t_1, acop5).saida) + (5*xyz3_t+27*xyz3_t_1)
        /32
67
        Xint24 = (h/64)*(3*F(t, xyz, parametros, xyz1_t, acop1, xyz2_t, acop2
        , xyz3_t, acop3, xyz4_t, acop4, xyz5_t, acop5).saida-9*F(t, xyz,
        parametros, xyz1_t_1, acop1, xyz2_t_1, acop2, xyz3_t_1, acop3,
        xyz4_t_1, acop4, xyz5_t_1, acop5).saida) + (5*xyz4_t+27*xyz4_t_1)
        /32
        Xint25 = (h/64)*(3*F(t, xyz, parametros, xyz1_t, acop1, xyz2_t, acop2
        , xyz3_t, acop3, xyz4_t, acop4, xyz5_t, acop5).saida-9*F(t, xyz,
        parametros, xyz1_t_1, acop1, xyz2_t_1, acop2, xyz3_t_1, acop3,
        xyz4_t_1, acop4, xyz5_t_1, acop5).saida) + (5*xyz5_t+27*xyz5_t_1)
        /32
69
        K3 = F(t+h*3/4, xyz + K2*h*3/4, parametros, Xint21, acop1, Xint22,
        acop2, Xint23, acop3, Xint24, acop4, Xint25, acop5).saida
71
        saida = xyz + (2.0*K1 + 3.0*K2 + 4.0*K3)*h/9.0
73
        else:
75
            saida = np.array(xyz)
77
        return saida
79 def Vt(temperatura):
    q = 1.60217663*10**-19 ### carga do eletron
81    kb = 1.380649*10**-23 ### constante de boltzamn

```

```

T = temperatura + 273.15 ### temperatura em kelvin 30C
83     return kb*T/q

85 def corelacao(sig1, sig2):
    '''Funcao para normalizar e realizar a correlacao cruzada'''
87
    a = (sig1 - np.mean(sig1)) / (np.std(sig1) * len(sig1))
89     b = (sig2 - np.mean(sig2)) / np.std(sig2)

91     sig = scipy.signal.correlate(a, b, mode='full', method='auto')
    lags = scipy.signal.correlation_lags(len(a), len(b))
93
    return lags, sig
95
def Atraso(lag, signal):
97     '''Funcao para localizar o atraso'''
    for i in range(len(signal)):
99         if signal[i] == np.max(signal):
                saida = lag[i]
101     return saida

103 class criar_oscilador:
    '''funcao para criar osciladores'''
105     def __init__(self, g_estrela=25, C1=10*10**-9, C2=3.3*10**-9, L=220*10**-6, R
        =100, random=1, alphaF=1):

107         C11=C1*random
        C21=C2*random
109         R1=R*random
        L1=L*random
111         self.g_estrela = g_estrela
        self.w01 = 1/(np.sqrt(L1*((C11*C21)/(C11+C21))))
113         self.Q = self.w01*L1/R1
        self.K = C21/(C11+ C21)
115         self.freq = self.w01/(2*np.pi)
        self.I = round((g_estrela*Vt(30)*R1*(C11+C21))/(alphaF*L1)*1000 , 2)
117         self.param = g_estrela, self.Q, self.K
        self.xyz=np.array([np.random.uniform(1.00, 1.1),
119                         np.random.uniform(1.00, 1.1),
                            np.random.uniform(1.00, 1.1)])
121     return None

123 osciladorMATRIZ = criar_oscilador(g_estrela=25.1)
    f2 = osciladorMATRIZ.freq
125
    M = 15000
127     dt = 0.1

```

```
t = np.arange(0, M*dt, dt)
129 lix0 = int(M*dt*0.6/dt)
    t_arbitrario = np.linspace(0, M, M)
131 t_segundos = t_arbitrario / f2
    chavet = 15
133 chave = chavet*f2/1000

135 epsilon = 1

137 ##### atrasos entre os osciladores

139 taun = [int(15/dt), int(20/dt), int(30/dt), int(70/dt), int(90/dt)]

141 G = gridspec.GridSpec(2, 4)

143 for n in range(1):

145     tau = taun[n]

147     ##### CRIANDO OSCILADORES #####

149     g1 = 25.1
        g2 = 25.1
151     g3 = 25.1

153     ### diferenca percentual dos componentes dos osciladores
        rd1 = np.random.uniform(1.00, 1.00)
155     rd2 = np.random.uniform(1.00, 1.00)
        rd3 = np.random.uniform(1.00, 1.00)
157
        oscilador1 = criar_oscilador(g_estrela=g1, random=rd1)
159     oscilador2 = criar_oscilador(g_estrela=g2, random=rd2)
        oscilador3 = criar_oscilador(g_estrela=g3, random=rd3)
161
        param1 = oscilador1.g_estrela, oscilador1.Q, oscilador1.K, 1, 0
163     param2 = oscilador2.g_estrela, oscilador2.Q, oscilador2.K, 1, 0
        param3 = oscilador3.g_estrela, oscilador3.Q, oscilador3.K, 1, 0
165
        osc1 = np.zeros([len(t), 3])
167     osc1[0,:] = oscilador1.xyz

169     osc2 = np.zeros([len(t), 3])
        osc2[0,:] = oscilador2.xyz

171     osc3 = np.zeros([len(t), 3])
173     osc3[0,:] = oscilador3.xyz
```

```

175     with alive_bar(len(t)-1) as bar:
176         for i in range(len(t)-1):
177
178             if i < chave:
179
180                 osc1[i+1] = Osc.int_delay(Osc,t[i],dt,osc1[i], param1)
181                 osc2[i+1] = Osc.int_delay(Osc,t[i],dt,osc2[i], param2)
182                 osc3[i+1] = Osc.int_delay(Osc,t[i],dt,osc3[i], param3)
183
184             else:
185                 osc1[i+1] = Osc.int_delay(Osc,t[i],dt,osc1[i], param1, osc2[i-tau
186                     ], osc2[i-tau+1], epsilon, osc3[i-tau], osc3[i-tau+1],
187                     epsilon)
188                 osc2[i+1] = Osc.int_delay(Osc,t[i],dt,osc2[i], param2, osc1[i-tau
189                     ], osc1[i-tau+1], epsilon)
190                 osc3[i+1] = Osc.int_delay(Osc,t[i],dt,osc3[i], param3, osc1[i-tau
191                     ], osc1[i-tau+1], epsilon)
192
193             bar()
194
195     xyz_grafico = 1 #### x=0 , y=1 , z=2
196
197     plt.figure('1', figsize=(14, 7))
198     plt.subplots_adjust(top=0.945, bottom=0.07, left=0.074, right=0.983, hspace
199         =0.445, wspace=0.752)
200     plt.subplot(G[0,0:4])
201     plt.tick_params(labelsize=10)
202
203     plt.title(r"$\epsilon=1$ " + r"          $\tau$="+str(int(tau*dt) )+' $\mu s$ ',
204         loc='left', fontsize=14)
205     plt.plot(t_segundos*1000, osc1[:,xyz_grafico], label = 'OSC 1', linewidth
206         =0.9, color='b')
207     plt.plot(t_segundos*1000, osc2[:,xyz_grafico], label = 'OSC 2', linewidth
208         =0.9, color='r')
209     plt.plot(t_segundos*1000, osc3[:,xyz_grafico], label = 'OSC 3', linewidth
210         =0.9, color='g')
211
212     plt.xlabel('Tempo ($\mu s$)', fontsize = '14')
213     plt.ylabel('Amplitude', fontsize = '14')
214     plt.xlim(13.5,25)
215     plt.ylim(1.1*np.min(osc1[:,xyz_grafico]),4*np.mean(osc1[:,xyz_grafico]))
216     plt.vlines(chavet, np.min(osc1[:,xyz_grafico]) , 5*np.mean(osc1[:,xyz_grafico
217         ]), label='chave', colors='k', linewidth=1.2, linestyle='--')
218     plt.grid()
219     plt.legend(fontsize='10', loc='upper right')
220
221     plt.subplot(G[1,0:1])

```

```

plt.tick_params(labelsize=10)
213 lags12, sig12 = corelacao(osc1[lix0:,xyz_grafico], osc2[lix0:,xyz_grafico])
plt.plot(lags12*dt, sig12, linewidth=1, color='b')
215
plt.title("$C_{12}$="+ " {} $\mu$s , {}%".format(round(Atraso(lags12,sig12)*
    dt), round(np.max(sig12),2)*100), loc='center', fontsize = '14')
217 plt.vlines(Atraso(lags12,sig12)*dt,-1,1, label='atraso', colors='r',
    linewidth=1)
plt.xlabel('Atraso ($\mu$s)', fontsize = '14')
219 plt.ylabel(r'$C_{12}$ (\tau)$', fontsize = '14')
plt.xlim(-60,60)
221 plt.ylim(0,1)
plt.yticks(np.arange(0, 1.1, 0.2))
223 plt.xticks(np.arange(-60, 60, 30))
plt.grid()
225
plt.subplot(G[1,1:2])
227 plt.tick_params(labelsize=10)
lags13, sig13 = corelacao(osc1[lix0:,xyz_grafico], osc3[lix0:,xyz_grafico])
229 plt.plot(lags13*dt, sig13, linewidth=1, color='b')
231
plt.title("$C_{13}$="+ " {} $\mu$s , {}%".format(round(Atraso(lags13,sig13)*
    dt), round(np.max(sig13),2)*100), loc='center', fontsize = '14')
plt.vlines(Atraso(lags13,sig13)*dt,-1,1, label='atraso', colors='r',
    linewidth=1)
233 plt.xlabel('Atraso ($\mu$s)', fontsize = '14')
plt.ylabel(r'$C_{13}$ (\tau)$', fontsize = '14')
235 plt.xlim(-60,60)
plt.ylim(0,1)
237 plt.yticks(np.arange(0, 1.1, 0.25))
plt.xticks(np.arange(-60, 60, 30))
239 plt.grid()
241
plt.subplot(G[1,2:3])
plt.tick_params(labelsize=10)
243 lags23, sig23 = corelacao(osc2[lix0:,xyz_grafico], osc3[lix0:,xyz_grafico])
plt.plot(lags23*dt, sig23, linewidth=1, color='b')
245
plt.title("$C_{23}$="+ " {} $\mu$s , {}%".format(round(Atraso(lags23,sig23)*
    dt), round(np.max(sig23),2)*100), loc='center', fontsize = '14')
247 plt.vlines(Atraso(lags23,sig23)*dt,-1,1, label='atraso', colors='r',
    linewidth=1)
plt.xlabel('Atraso ($\mu$s)', fontsize = '14')
249 plt.ylabel(r'$C_{24}$ (\tau)$', fontsize = '14')
plt.xlim(-60,60)
251 plt.ylim(0,1)
plt.yticks(np.arange(0, 1.1, 0.25))

```

```
253 plt.xticks(np.arange(-60, 60, 30))
    plt.grid()
255
    try:
257         combined_data = np.vstack((osc1[lix0:, xyz_grafico], osc2[lix0:,
            xyz_grafico], osc3[lix0:, xyz_grafico]))
    except IndexError as e:
259         print(f"IndexError: {e}")
        raise

261
    try:
263         df = pd.DataFrame(combined_data)
    except Exception as e:
265         print(f"Erro ao criar DataFrame: {e}")
        raise

267
    df = df.transpose()
269 df.columns = ['OSC1', 'OSC2', 'OSC3']

271 plt.subplot(G[1,3:4])
    try:
273         cmap = sns.diverging_palette(h_neg=240, h_pos=10, s=100, as_cmap=True)
        heatmap = sns.heatmap(df.corr(), annot=True, vmin=-1, vmax=1, cmap=cmap,
            annot_kws={"fontsize": 8})
275    except Exception as e:
        print(f"Erro ao criar grafico: {e}")
277        raise

279 plt.tight_layout()
    plt.show()
281
plt.show()
```